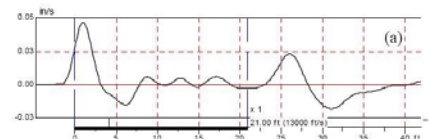
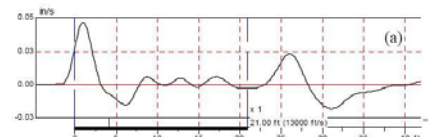


## CONTENIDO

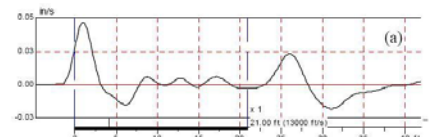
INTRODUCCIÓN.....	11
<b>1. LA PRUEBA DE INTEGRIDAD DE PILOTES (PIT) .....</b>	<b>20</b>
1.1 HISTORIA.....	20
1.2 EQUIPO .....	22
1.2.1 El martillo. ....	22
1.2.2 El sensor del Movimiento. ....	24
1.2.3 Procesadores.....	24
1.3 NORMATIVIDAD DEL ENSAYO.....	25
1.4 EJECUCIÓN .....	28
1.5 ARREGLO DE INFORMACIÓN.....	33
1.5.1 Amplificación y Filtrado. ....	33
1.6 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN .....	36
1.6.1 Cuantificación del daño del pilote. Método Beta. ....	43
1.6.2 Cuantificación del daño del pilote. Método del perfil de Impedancia.....	44
1.7 LIMITACIONES Y CONSIDERACIONES EN LA INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS ...	45
<b>2. PROPAGACIÓN DE ONDAS LONGITUDINALES EN PILOTES.....</b>	<b>48</b>
2.1 PRINCIPIOS DE PROPAGACIÓN DE ONDAS DE ESFUERZOS.....	48
2.1.1 Velocidad de Propagación de onda. ....	50
2.1.2 Velocidad de propagación de onda en barras delgadas. ....	51
2.2 DEDUCCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO .....	52
2.3 CLASIFICACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL .....	54
2.4 SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN UNIDIMENSIONAL DE ONDA .....	55
2.4.1 Ejemplo de solución por el método de separación de variables. ....	56
2.4.2 Ejemplo de solución por el método de Transformada de Laplace.....	59
2.4.3 Solución por el Método de las Características. ....	61
2.4.4 Introducción a la solución por el Método de Análisis Espectral. ....	66
2.4.5 Solución Numérica.....	68



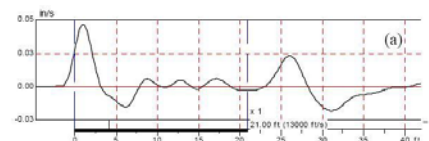
<b>2.5</b>	<b>INFLUENCIAS EXTERNAS.....</b>	<b>71</b>
2.5.1	Pilote con fuerzas cortantes a lo largo de su fuste.....	71
2.5.2	Pilote con fuerzas externas elásticas y de amortiguamiento.....	75
2.5.3	Influencias externas analizadas mediante la relación espectral $k$ .....	77
2.4.4	Planteamiento de una solución numérica que incorpora fuerzas de fricción.....	79
<b>2.6</b>	<b>REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDA.....</b>	<b>80</b>
<b>3.</b>	<b>ANÁLISIS ESPECTRAL PARA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN PILOTES.....</b>	<b>87</b>
<b>3.1</b>	<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>87</b>
<b>3.2</b>	<b>ANÁLISIS DE FOURIER.....</b>	<b>88</b>
<b>3.3</b>	<b>TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER (CFT).....</b>	<b>91</b>
<b>3.4</b>	<b>TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT).....</b>	<b>92</b>
3.4.1	Ejemplo Numérico.....	94
3.4.2	Frecuencia de Nyquist y fenómeno de Alias.....	96
<b>3.5</b>	<b>TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT).....</b>	<b>97</b>
<b>3.6</b>	<b>ANÁLISIS ESPECTRAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES.....</b>	<b>98</b>
3.6.1	Representación Espectral de Derivadas.....	98
3.6.2	Relación Espectral.....	100
3.6.3	Solución espectral de la Ecuación de Onda unidimensional.....	102
3.6.4	Velocidad de fase.....	103
<b>4.</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN UNIDIMENSIONAL DE ONDAS EN PILOTES.....</b>	<b>104</b>
<b>4.1</b>	<b>PROPAGACIÓN Y RECONSTRUCCIÓN DE ONDAS.....</b>	<b>105</b>
4.1.1	Algoritmo Básico.....	105
<b>4.2</b>	<b>SOLUCIÓN ESPECTRAL BÁSICA PARA ONDAS EN PILOTES.....</b>	<b>107</b>
4.2.1	Comportamiento de las propiedades mecánicas.....	108
4.2.2	Historia de Fuerza aplicada en la cabeza del pilote.....	108
4.2.3	Solución para una onda viajando a la derecha.....	111
4.2.4	Condiciones de Frontera.....	112
<b>4.3</b>	<b>SOLUCIÓN DE REFLEXIONES Y TRANSMISIONES DE ONDA EN LAS FRONTERAS MEDIANTE ANÁLISIS ESPECTRAL.....</b>	<b>114</b>
4.3.1	Reflexión de onda en una punta libre del pilote.....	114
4.3.2	Reflexión de onda en una punta restringida por una frontera elástica.....	115
4.3.3	Reflexión y transmisión de onda ante un cambio de impedancia.....	116



<b>5. PROPAGACIÓN DE ONDAS Y SIMULACIÓN DE LA PRUEBA PIT MEDIANTE EL PROGRAMA PITGRAPH PARA MATLAB.....</b>	<b>119</b>
<b>5.1 DESCRIPCIÓN DE LA INTERFAZ GRÁFICA “PITGRAPH.fig” .....</b>	<b>119</b>
5.1.1 Datos de entrada para generar el pulso inicial sobre la cabeza del pilote.....	120
5.1.2 Generación de la gráfica del pulso seleccionado.....	122
5.1.3 Datos de entrada para realizar el análisis de propagación de onda.....	125
5.1.4 Generación de la gráfica de la propiedad mecánica seleccionada evaluada en la posición X.....	127
5.1.5 Datos de entrada y generación de la gráfica de propagación de onda en diferentes posiciones.....	130
5.1.6 Simulación de la prueba PIT.....	133
<b>5.2 FUNCIÓN “PITGRAPH.m” .....</b>	<b>138</b>
5.2.1 Diagramas de Flujo de cada uno de los botones de la interfaz gráfica.....	139
<b>6. ANÁLISIS DE SIMULACIONES Y COMPARACIÓN CON PRUEBAS PIT OBTENIDAS EN CAMPO .....</b>	<b>144</b>
<b>6.1 ANÁLISIS DE LOS DIFERENTES PULSOS INICIALES .....</b>	<b>144</b>
6.1.1 Fuerza Instantánea.....	144
6.1.2 Pulso Triangular.....	146
6.1.3 Pulso tipo Rectangular.....	148
6.1.4 Pulso tipo Medio Seno.....	150
<b>6.2 ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DEL PULSO A LO LARGO DEL PILOTE .....</b>	<b>152</b>
6.2.1 Comportamiento del desplazamiento, velocidad y aceleración.....	152
6.2.2 Comportamiento de la propagación del esfuerzo, deformación y fuerza de reacción.....	156
<b>6.3 OBTENCIÓN DE LAS RIGIDECES DEL SUELO USANDO EL PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PLAXIS .....</b>	<b>160</b>
<b>6.4 SIMULACIÓN DE DIFERENTES CASOS DE LA PRUEBA PIT.....</b>	<b>169</b>
6.4.1 Caso (a). Pilote homogéneo sin fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez K en su punta.....	171
6.4.2 Caso (b). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez K en su punta.....	173
6.4.4 Caso (c). Pilote homogéneo sin fuerzas retardantes y con resorte de rigidez K en su punta.....	174
6.4.4 Caso (d). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes y con resorte de rigidez K en su punta.....	175
6.4.5 Caso (e). Pilote con reducción de impedancia sin fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez K en su punta.....	176
6.4.6 Caso (f). Pilote con reducción de impedancia, con fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez K en su punta.....	179
6.4.7 Caso (g). Pilote con reducción de impedancia, sin fuerzas retardantes y con resorte de rigidez K en su punta.....	180
6.4.8 Caso (h). Pilote con reducción de impedancia, con fuerzas retardantes y con resorte de rigidez K en su punta.....	181
6.4.9 Caso (i). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez K en su punta.....	182
6.4.10 Caso (j). Pilote con aumento de impedancia, con fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez K en su punta.....	184



6.4.11 Caso (k). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y con resorte de rigidez K en su punta.....	185
6.4.12 Caso (l). Pilote con aumento de impedancia, con fuerzas retardantes y con resorte de rigidez K en su punta.....	186
6.4.13 Efectos de Amortiguamiento causados por el material del pilote. ....	187
<b>6.5 RESULTADOS DE PRUEBAS DE CAMPO Y COMPARACIÓN CON SIMULACIONES DEL PROGRAMA PITGRAPH .....</b>	<b>190</b>
6.5.1 Pilotes defectuosos en la obra Carrefour Suba. ....	190
6.5.2 Pilotes homogéneos en la obra Carrefour Suba.....	198
6.5.3 Pilote defectuoso en Puente Batallón Caldas. Obra Transmilenio NQS Sur Tramo1. ....	202
<b>7. CONCLUSIONES.....</b>	<b>207</b>
<b>8. RECOMENDACIONES.....</b>	<b>212</b>
<b>9. BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>213</b>



## INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Pilote defectuoso fundido in-situ .....	12
Figura 2 Vista del monitor del PIR-A .....	14
Figura 3 Prueba CSL Típica.....	15
Figura 4 Prueba de Carga Dinámica (PDA).....	16
Figura 5 Prueba de Integridad del Pilote (PIT) .....	17
Figura 6 Ejemplo esquemático de la señal de respuesta para un pilote. Prueba PIT.....	17
Figura 7 Herramientas usadas para realizar el ensayo PIT.....	22
Figura 8 Señales obtenidas en un pilote con martillos diferentes.....	23
Figura 9 Disposición del ensayo sónico con martillo instrumentado .....	25
Figura 10 Limpieza de la cabeza del pilote y ubicación del acelerómetro.....	29
Figura 11 Señal obtenida de la aplicación de la fuerza en el centro del pilote .....	30
y acelerómetro ubicado en el borde del mismo .....	30
Figura 12 Señal obtenida de la aplicación de la fuerza en un borde del pilote.....	31
y acelerómetro ubicado en el borde opuesto .....	31
Figura 13 Señal obtenida de la aplicación de la fuerza a $\frac{1}{4}$ del diámetro del pilote y acelerómetro ubicado a $\frac{3}{4}$ del mismo diámetro.....	32
Figura 14 Señales obtenidas de la aplicación de la fuerza en los cuatro .....	33
puntos cardinales (N, S, W, E) y acelerómetro ubicado en el centro del pilote .....	33
Figura 15 Señal cruda obtenida después de la prueba PIT .....	34
Figura 16 Señal con amplificación únicamente .....	35
Figura 17 Señal con 40 amplificaciones y 25 High Pass Filter .....	36
Figura 18 Representación del viaje de las ondas sónicas en el pilote .....	38
Figura 19 Simulación esquemática del efecto de reducción de impedancia en la señal.....	39
Figura 20 Simulación esquemática del efecto de aumento de impedancia en la señal.....	39
Figura 21 Simulación esquemática del efecto de reducción local en el pilote .....	40
Figura 22 Simulación esquemática del efecto de ampliación local en el pilote .....	40
Figura 23 Perfil de Impedancia obtenido mediante el programa PIT-W para una señal con reducción de impedancia. ....	45
Figura 24 Simulación en elementos finitos de propagación de ondas ante un impacto en una placa.....	49
Figura 25 Frentes de onda de compresión, corte y Rayleigh producidas por un impacto puntual en una superficie.....	49
Figura 26 Análisis de fuerzas de un elemento pequeño en una barra.....	52
Figura 27 Tipos de análisis de la ecuación unidimensional de onda para obtener su solución .....	55
Figura 28 Condiciones iniciales y de frontera para la solución de la ecuación (2.10) por el método de separación de variables. ....	56
Figura 29 Desplazamiento de la punta libre. Sumatoria de series de Fourier. Ecuación (2.29).....	61
Figura 30 Soluciones gráficas por el método de las características .....	64
Figura 31 Velocidad en la base del pilote mediante el análisis del método de las características.....	66
Figura 32 Elemento $n$ del pilote cargado axialmente. Solución numérica .....	69
Figura 33 Pilote en el suelo con acción de fuerzas de fricción.....	73
Figura 34 Modelo para la prueba de carga dinámica solucionado por WARRINGTON, 1997[24] .....	76
Figura 35 Influencias externas sobre el pilote que redefinen la ecuación de onda.....	78
Figura 36 Elemento $n$ del pilote cargado axialmente. Solución numérica con fuerzas de fricción.....	79

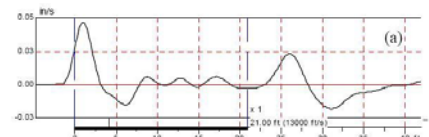


Figura 37 Pilote analizado por Verruijt (2005) para la deducción de los coeficientes de reflexión y transmisión de ondas. ....	81
Figura 38 Reflexión y transmisión de onda normal ante un cambio de impedancia $Z$ .....	83
Figura 39 Reflexión y transmisión de la velocidad para $Z_1 > Z_2$ .....	85
Figura 40 Reflexión y transmisión del esfuerzo para $Z_1 > Z_2$ .....	85
Figura 41 Ondas de compresión y tensión ante un cambio de impedancia .....	86
Figura 42 Funciones periódicas en el dominio del tiempo.....	88
Figura 43 Discretización para una función periódica en el tiempo .....	92
Figura 44 Ejemplo de pulso rectangular con valores reales en el dominio del tiempo .....	95
Figura 45 Metodología general de análisis espectral para propagación de ondas .....	106
Figura 46 Pulso de entrada modelado mediante la ecuación (4.7) .....	109
Figura 47 Pulso de entrada de la forma de la mitad del ciclo de la función seno.....	110
Figura 48 Fronteras típicas en pilotes para modelar la prueba PIT .....	113
Figura 49 Interfaz gráfica del programa PITGRAPH y valores del pilote predeterminado .....	120
Figura 50 Posibles mensajes de error al graficar el pulso. ....	123
Figura 51 Pulso predeterminado para Fuerza Instantánea.....	123
Figura 52 Pulso predeterminado para el tipo Triangular.....	124
Figura 53 Pulso predeterminado para el tipo Rectangular .....	124
Figura 54 Pulso predeterminado para tipo Medio Seno .....	125
Figura 55 Mensaje de error al graficar la solución en alguna posición $X$ .....	127
Figura 56 Solución de la ecuación de onda para el desplazamiento en $X=0$ . Onda que viaja a la derecha.....	127
Figura 57 Solución de la ecuación de onda para la velocidad en $X=0$ . Onda que viaja a la derecha. ....	128
Figura 58 Solución de la ecuación de onda para aceleración en $X=0$ . Onda que viaja a la derecha. ....	128
Figura 59 Solución de la ecuación de onda para el esfuerzo en $X=0$ . Onda que viaja a la derecha.....	129
Figura 60 Solución de la ecuación de onda para la deformación en $X=0$ . Onda que viaja a la derecha. ....	129
Figura 61 Solución de la ecuación de onda para la fuerza de reacción en $X=0$ . Onda que viaja a la derecha. ....	130
Figura 62 Solución de la ecuación de onda para todas las propiedades mecánicas en $X=0$ . Onda que viaja a la derecha. ....	131
Figura 63 Solución de la ecuación de onda para la velocidad evaluada desde $X=0$ hasta $X=10$ . Onda que viaja a la derecha. ....	132
Figura 64 Recuadro correspondiente a la simulación de la prueba PIT en la interfaz gráfica PITGRAPH.fig	133
Figura 65 Posibles mensajes de error al generar la simulación PIT .....	135
Figura 66 Simulación predeterminada de la prueba PIT para la primera sección. ....	136
Figura 67 Simulación predeterminada de la prueba PIT para la segunda sección. ....	136
Figura 68 Simulación predeterminada de la prueba PIT para las secciones 1 y 2.....	137
Figura 69 Simulación predeterminada de la prueba PIT para las secciones 1, 2 y pilote total.....	137
Figura 70 Simulación predeterminada de la prueba PIT para el pilote total. ....	138
Figura 71 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR PULSO .....	139
Figura 72 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR EN POSICIÓN $X$ (1 Parte) .....	140
Figura 73 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR EN POSICIÓN $X$ (2 Parte) .....	141
Figura 74 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR PROPAGACIÓN (1 Parte) .....	141
Figura 75 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR PROPAGACIÓN (2 Parte) .....	142
Figura 76 Diagrama de Flujo del botón SIMULAR (1 Parte).....	142
Figura 77 Diagrama de Flujo del botón SIMULAR (2 Parte).....	143
Figura 78 Pulso generado por la fuerza instantánea con diferentes divisiones $N$ del período $T$ .....	145
Figura 79 Pulso generado por el pulso triangular con diferentes divisiones $N$ del período $T$ .....	147
Figura 80 Pulso generado por el pulso rectangular con diferentes divisiones $N$ del período $T$ .....	149
Figura 81 Pulso generado por el pulso Medio Seno con diferentes divisiones $N$ del período $T$ (1 Parte) .....	150
Figura 81 Pulso generado por el pulso Medio Seno con diferentes divisiones $N$ del período $T$ (2 Parte) .....	151
Figura 82 Desplazamiento para pulso Medio Seno predeterminado en diferentes posiciones $X$ .....	153

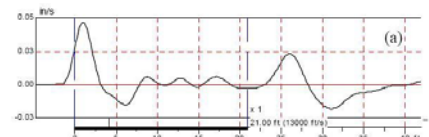




Figura 83 Velocidad para pulso Medio Seno predeterminado en diferentes posiciones X .....	154
Figura 84 Aceleración para pulso Medio Seno predeterminado en diferentes posiciones X .....	155
Figura 85 Esfuerzo para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde X=0 a X=10 .....	157
Figura 86 Esfuerzo para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde X=10 a X=20 .....	157
Figura 87 Deformación para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde X=0 a X=10 .....	158
Figura 88 Deformación para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde X=10 a X=20 .....	158
Figura 89 Fuerza para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde X=0 a X=10 .....	159
Figura 90 Fuerza para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde X=10 a X=20 .....	159
Figura 91 Tipos de materiales modelados en PLAXIS .....	162
Figura 92 Condiciones para los pilotes de L=10.0m y $\phi$ de 0.4 y 1.0m para analizar en elementos finitos mediante PLAXIS .....	163
Figura 93 Malla de elementos finitos para los pilotes de L=10.0m y $\phi$ de 0.4 y 1.0m generada mediante PLAXIS .....	164
Figura 94 Ejemplo de resultados de deformaciones verticales y esfuerzos totales obtenidos mediante PLAXIS a lo largo del fuste del pilote .....	165
Figura 95 Ejemplo de resultados de deformaciones verticales y esfuerzos totales obtenidos mediante PLAXIS en la punta del pilote .....	166
Figura 96 Rigideces K en el fuste del pilote para diferentes suelos (Pilote de $\phi = 0.4m$ ) .....	167
Figura 97 Rigideces K en la punta del pilote para diferentes suelos (Pilote de $\phi = 0.4m$ ) .....	167
Figura 98 Rigideces K en el fuste del pilote para diferentes suelos (Pilote de $\phi = 1.0m$ ) .....	168
Figura 99 Rigideces K en la punta del pilote para diferentes suelos (Pilote de $\phi = 1.0m$ ) .....	168
Figura 100 Casos simulados mediante el programa PITGRAPH (1 Parte).....	170
Figura 101 Casos simulados mediante el programa PITGRAPH (2 Parte).....	171
Figura 102 Simulación Caso (a). Pilote homogéneo sin fuerzas retardantes y sin resorte K en la punta. ....	172
Figura 103 Simulación Caso (b). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 9.44 \times 10^7 N/m$ ) y sin resorte K en la punta. ....	173
Figura 104 Simulación Caso (b). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^8 N/m$ ) y sin resorte K en la punta. ....	174
Figura 105 Simulación Caso (c). Pilote homogéneo sin fuerzas retardantes y con resorte K en la punta ( $K_{punta} = 1.0 \times 10^{11} N/m$ ) .....	175
Figura 106 Simulación Caso (d). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^8 N/m$ ) y con resorte K en la punta ( $K_{punta} = 1.0 \times 10^{11} N/m$ ) .....	176
Figura 107 Simulación Caso (e). Pilote con reducción de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte K en la punta. Secciones 1 y 2 .....	177
Figura 108 Simulación Caso (e). Pilote con reducción de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte K en la punta. Pilote Total .....	177
Figura 109 Simulación Caso (f). Pilote con reducción de impedancia, con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^8 N/m$ ) y sin resorte K en la punta. Pilote Total.....	179
Figura 110 Simulación Caso (g). Pilote con reducción de impedancia, sin fuerzas retardantes y con resorte K en la punta ( $K_{punta} = 1.0 \times 10^{11} N/m$ ). Pilote Total .....	180
Figura 111 Simulación Caso (h). Pilote con reducción de impedancia, con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^8 N/m$ ) y con resorte K en la punta ( $K_{punta} = 1.0 \times 10^{11} N/m$ ). Pilote Total .....	181
Figura 112 Simulación Caso (i). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte K en la punta. Secciones 1 y 2 .....	182
Figura 113 Simulación Caso (i). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte K en la punta. Pilote Total.....	184
Figura 114 Simulación Caso(j). Pilote con aumento de impedancia, con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^8 N/m$ ) y sin resorte K en la punta. Pilote Total.....	185

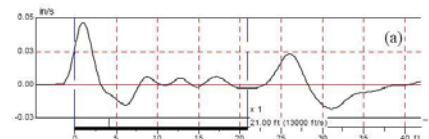
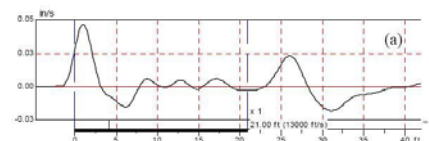


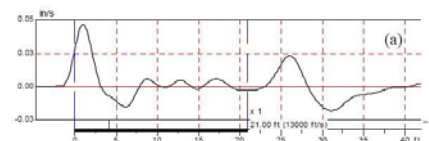
Figura 115 Simulación Caso (k). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y con resorte K en la punta ( $K_{punta}=1.0 \times 10^{11} \text{N/m}$ ). Pilote Total .....	186
Figura 116 Simulación Caso (l). Pilote con aumento de impedancia, con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^8 \text{N/m}$ ) y con resorte K en la punta ( $K_{punta}=1.0 \times 10^{11} \text{N/m}$ ). Pilote Total .....	187
Figura 117 Caso (d) con efectos de amortiguamiento por el material del pilote.....	188
Figura 118 Caso (h) con efectos de amortiguamiento por el material del pilote.....	188
Figura 119 Caso (l) con efectos de amortiguamiento por el material del pilote.....	189
Figura 120 Señal PIT para pilote 145. Carrefour Suba .....	191
Figura 121 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 145. Carrefour Suba. ....	192
Figura 122 Simulación de la prueba PIT para el pilote 145 mediante el programa PITGRAPH .....	193
Figura 123 Señal PIT para pilote 108. Carrefour Suba .....	194
Figura 124 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 108. Carrefour Suba. ....	196
Figura 125 Simulación de la prueba PIT para el pilote 108 mediante el programa PITGRAPH .....	197
Figura 126 Señal PIT para pilote 55. Carrefour Suba .....	198
Figura 127 Señal PIT para pilote 63. Carrefour Suba .....	199
Figura 128 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 55. Carrefour Suba. ....	200
Figura 129 Simulación de la prueba PIT para el pilote 55 mediante el programa PITGRAPH .....	200
Figura 130 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 63. Carrefour Suba. ....	201
Figura 131 Simulación de la prueba PIT para el pilote 63 mediante el programa PITGRAPH .....	201
Figura 132 Señal PIT para pilote 3. Puente Batallón Caldas .....	203
Figura 133 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 108. Carrefour Suba. ....	204
Figura 134 Simulación de la prueba PIT para el pilote 3 mediante el programa PITGRAPH .....	205





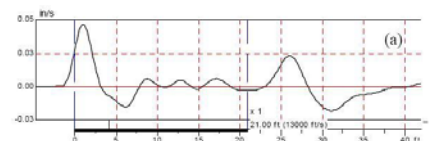
## INDICE DE TABLAS

Tabla 1 Ventajas y Desventajas de diferentes métodos que evalúan la calidad de cimentaciones profundas ....	13
Tabla 2 Estándares y códigos para pruebas de integridad en pilotes en el mundo .....	26
Tabla 3 Categorías de clasificación de la señal obtenida con el equipo PIT .....	43
Tabla 4 Velocidad de propagación de onda en diferentes materiales.....	51
Tabla 5 Categorías en las que se clasifican las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden con dos variables .....	54
Tabla 6 Propiedades mecánicas en la propagación de ondas .....	108
Tabla 7 Condiciones de frontera típicas para considerar en pilotes .....	112
Tabla 8 Rango de parámetros elásticos de varios suelos.....	161
Tabla 9 Propiedades mecánicas asignadas al pilote para modelar en PLAXIS.....	162
Tabla 10 Resultado de las rigideces K de los casos simulados mediante PLAXIS.....	169
Tabla 11 Registro de construcción de los pilotes analizados. Obra Carrefour Suba.....	190
Tabla 12 Parámetros del pilote 145. Carrefour Suba .....	191
Tabla 13 Parámetros del pilote 108. Carrefour Suba .....	195
Tabla 14 Parámetros del pilote 55. Carrefour Suba .....	199
Tabla 15 Parámetros del pilote 63. Carrefour Suba .....	199
Tabla 16 Registro de construcción de los pilotes analizados. Puente Batallón Caldas .....	203
Tabla 17 Parámetros del pilote 3. Puente Batallón Caldas.....	204



## ANEXOS

ANEXO 1 - CÓDIGO FUENTE DE LA FUNCIÓN PITGRAPH.M .....	217
ANEXO 2 - ANÁLISIS DE RIGIDECES DEL SUELO USANDO PLAXIS .....	245



## INTRODUCCIÓN

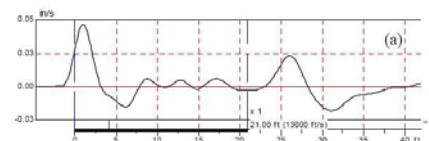
En la práctica común de la construcción de proyectos de infraestructura se hace necesario realizar, como etapa preliminar y básica, cimentaciones de acuerdo al tipo de estructura y principalmente al tipo y características físico-mecánicas del suelo de fundación sobre el que se va realizar la obra.

Luego de la ejecución de un estudio de suelos, y teniendo conocimiento sobre las cargas que se transmitirán al mismo, el Ingeniero Geotecnista recomienda el tipo de cimentación más adecuado. Dentro de las múltiples opciones, las cimentaciones profundas son consideradas como una opción indiscutible al presentarse malas condiciones de capacidad portante del suelo.

En el diseño de cimentaciones profundas, el ingeniero geotecnista da por hecho que los elementos que interactuarán con el suelo cuentan con una geometría homogénea en profundidad y con las dimensiones de sección transversal y longitud resultado de un diseño previo. Dichos valores son entregados a los ingenieros contratistas de la obra quienes construyen de la manera más precisa tales elementos.

Durante la labor de ejecución de cimentaciones profundas se presentan diferentes circunstancias que pueden llegar a afectar la forma de los pilotes bajo el suelo, haciendo que no se alcance la profundidad, secciones transversales y calidad del material previsto en el diseño (Ver Figura No.1)

Ante dicha realidad, y sabiendo que luego de llevar a cabo las obras constructivas se dificulta determinar la calidad y forma final de las cimentaciones de manera directa, se han desarrollado diferentes métodos para controlar la calidad de las cimentaciones profundas.



*Figura 1 Pilote defectuoso fundido in-situ*



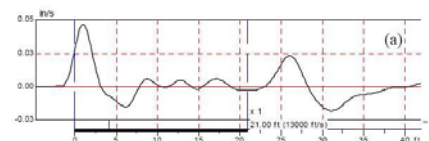
*Fuente: <http://www.fernandeztadeo.com/foto2.htm>*

Las incertidumbres generadas por los métodos de construcción de cimentaciones hacen de los métodos no destructivos para evaluar la calidad de los pilotes, herramientas indispensables para evaluar el estado final bajo la superficie del suelo para tales elementos.

Se utilizan principalmente para evaluar la integridad de cimentaciones profundas los siguientes métodos:

1. El registrador PIR (Pile Installation Recorder) para pilotes que van a ser fundidos in-situ (PIR-A)
2. La prueba CSL (Cross Hole Sonic Logger)
3. El método de alta deformación con el Pile Driver Analyzer (PDA)
4. El método de baja deformación mediante la prueba de integridad de pilotes PIT (Pile Integrity Test).

En la siguiente tabla se describe de manera general las ventajas y desventajas que tienen los anteriores métodos de evaluación de calidad de cimentaciones profundas.



*Tabla 1 Ventajas y Desventajas de diferentes métodos que evalúan la calidad de cimentaciones profundas*

MÉTODO	VENTAJA	DESVENTAJA
Control automático de ejecución. PIR (Pile Installation Recorder)	Facilitan datos en tiempo real durante la ejecución del pilote, lo que permite optimizar el empleo de materiales y detectar fallos en edad temprana.	Solo están desarrollados para pilotes hincados y para pilotes fundidos in-situ
Ultrasónico CSL (Cross Hole Sonic Logger)	Se emplea en pilotes fundidos "in situ" de cualquier diámetro o longitud.	Requiere que se dejen colocados tubos embebidos en el hormigón. En pilotes prefabricados esto no suele ser posible.
	Los defectos se identifican claramente a cualquier profundidad.	Los tubos a veces se deterioran y quedan inservibles.
		Se debe esperar a que el hormigón tenga una cierta resistencia.
Ensayos rápidos de carga. PDA	Permiten una evaluación del pilote no solo estructural sino también geotécnica, obteniéndose su capacidad de carga.	Requiere una masa importante de impacto (ensayo dinámico) o un equipo especial (Statnamic).
Prueba de Integridad de Baja Deformación (PIT). Sónico con martillo de mano.	No se requiere preparación especial del pilote.	Requiere interpretación especializada.
	Rapidez, sencillez y economía.	La punta del pilote no se detecta bien cuando la esbeltez es importante o hay varios cambios de sección.
	Detecta los fallos importantes en la calidad.	Se debe esperar a que el hormigón tenga una cierta resistencia.

*Fuente: Adaptado de <http://www.fernandeztadeo.com/ven.htm>*

El registrador PIR-A ayuda a prevenir problemas antes de que sucedan ya que va registrando el vertido de lechada de cemento o concreto con la profundidad.

En la siguiente figura se detalla una vista del monitor del equipo durante la etapa de vertido del concreto para un pilote fundido in-situ.

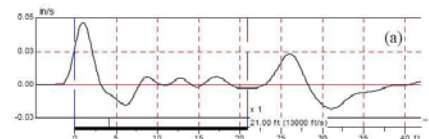
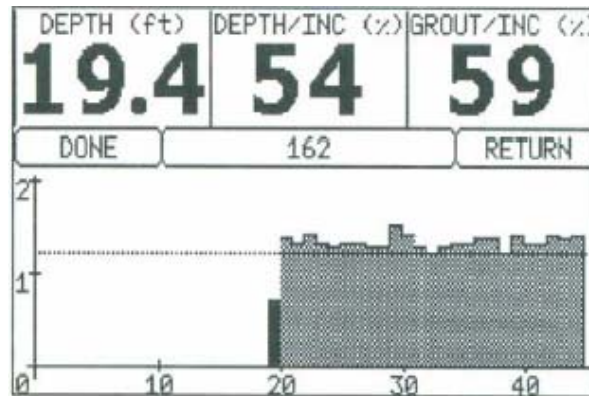


Figura 2 Vista del monitor del PIR-A



Fuente: [13] LIKINS. G, 2000

El volumen bombeado de concreto es medido con precisión y graficado en función de la profundidad, junto con el volumen mínimo requerido

Si el volumen bombeado es menor que el volumen requerido, una gráfica alerta al operador para que éste pueda hacer las correcciones, aprovechando que la lechada o el concreto se encuentran aún fluidos.

Por otro lado, la prueba CSL requiere de la instalación de tubos dentro del pilote antes de que el concreto sea vaciado. Al endurecerse el concreto, un transmisor de pulsación y un receptor se hacen descender dentro de los tubos instalados. Al emitir una onda ultrasónica, se mide el tiempo de llegada y la magnitud de la onda recibida como parámetros que informan sobre la calidad y homogeneidad del concreto.

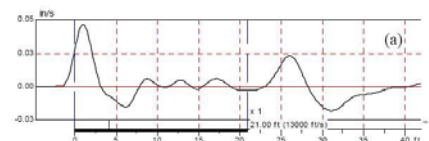
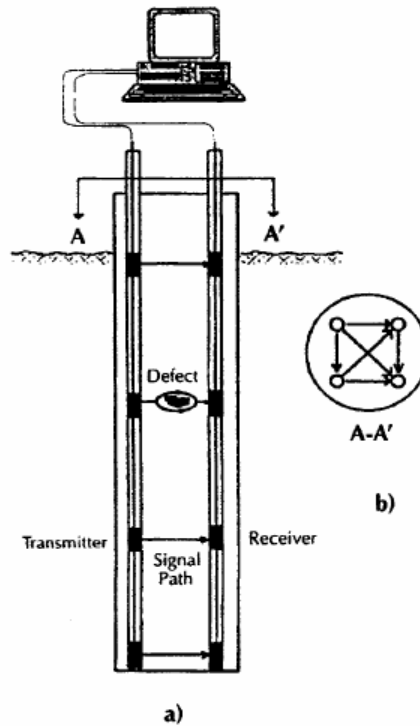




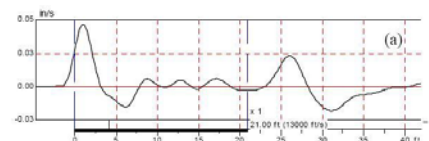
Figura 3 Prueba CSL Típica



Fuente: [4] CHERNAUSKAS, 1999

La evaluación de integridad de pilotes, adicionalmente, se puede realizar mediante la prueba PDA también conocida como prueba de carga dinámica. Con este ensayo se mide la fuerza y velocidad del pilote durante el impacto del martillo de hincar pilotes o mediante una caída libre de un gran peso (Figura No.4).

Su objetivo principal es determinar la capacidad de carga del pilote ante esfuerzos axiales. Este método de prueba da mejores resultados de evaluación de integridad que el método PIT con la desventaja que requiere un equipo más grande y costoso.



*Figura 4 Prueba de Carga Dinámica (PDA)*

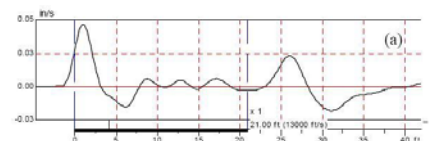


*Fuente: [13] LIKINS G. 2002*

Por su parte, el método PIT de baja deformación hace uso de la teoría de propagación unidimensional de una onda. Un martillo de mano realiza un golpe en la parte superior del pilote y un acelerómetro mide el movimiento de la parte superior del tronco (Figura No.5).

Su objetivo principal es determinar la variación con la profundidad de las características del concreto en cuanto al área de la sección y densidad.

Los golpes dados por el martillo generan una onda de tensión que recorre el pilote y ésta sufre reflexiones al encontrar cualquier variación de las características del material.



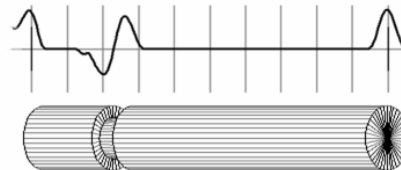
*Figura 5 Prueba de Integridad del Pilote (PIT)*



*Fuente: [15] LIKINS. G. 2000*

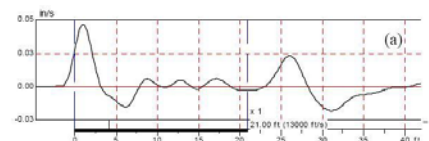
El equipo hace un registro de la evolución de la aceleración con el tiempo y la convierte a velocidad. Como la onda viaja a una velocidad fija conocida y el tiempo transcurrido entre la aplicación del golpe y la llegada de la reflexión son conocidas, es posible determinar la localización exacta de los defectos, así como se muestra esquemáticamente en la Figura No.6

*Figura 6 Ejemplo esquemático de la señal de respuesta para un pilote. Prueba PIT*



Este ensayo se ha hecho muy popular por su rápida y fácil ejecución, por su capacidad de detectar daños en la superficie del pilote, por su equipo liviano, portátil y sobre todo por su bajo costo de ejecución.

Sin embargo presenta algunas limitaciones y problemas: Se le dificulta detectar un segundo daño bajo una gran variación de características del material, la influencia de la fricción dificulta la interpretación de la señal en algunos casos, es imposible distinguir entre variación



de área y variación de densidad del material, y tiene dificultad de detección de un daño muy cercano a la punta del pilote.

Aún así, la prueba PIT es una herramienta muy útil. Muchas veces detecta fallas de grave riesgo para la estabilidad de la construcción que de otra manera pasarían desapercibidas, pero no puede ser vista como una herramienta que brinde la verdad absoluta.

Debido a que una de las limitaciones de la prueba se debe a la dificultad en la interpretación de los resultados y entendiendo que la teoría que enmarca el fenómeno que ocurre al interior del pilote es la teoría de propagación unidimensional de ondas en barras, en el presente trabajo de grado se ha revisado la teoría físico-matemática respectiva para utilizar una solución analítica del problema y lograr la simulación de la prueba PIT mediante un programa aplicativo.

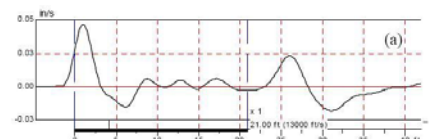
Para el presente trabajo se trazaron los siguientes objetivos generales y específicos.

## OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una aplicación computacional a partir de una solución analítica para el problema de propagación unidimensional de ondas en pilotes con sección variable teniendo en cuenta el efecto de las fuerzas de fricción. La aplicación debe representar gráficamente la propagación de ondas en el pilote y servir como herramienta de interpretación de resultados para la prueba de integridad de pilotes (PIT).

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Entender el funcionamiento general de la prueba de integridad de pilotes y la información que suministra.
2. Revisar, entender y aplicar la formulación matemática analítica que explica el fenómeno físico de propagación unidimensional de ondas en un medio continuo.



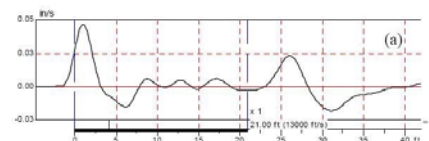
3. Identificar e incorporar las variables necesarias que requiere la solución analítica para la adaptación adecuada del fenómeno en pilotes.
4. Realizar un algoritmo computacional que implemente la solución analítica para hacer la representación gráfica de la propagación unidimensional de ondas en pilotes.
5. Elaborar un software con un diseño sencillo y práctico, mediante el cual se puedan introducir diferentes valores a las variables del problema y con ello analizar los resultados del programa de manera gráfica.
6. Comparar los resultados obtenidos en campo con la representación alcanzada por el programa desarrollado.

## METODOLOGÍA

Para la elaboración del presente trabajo se siguió la siguiente metodología:

1. Revisión de la bibliografía existente sobre las generalidades y teoría de la prueba de integridad de pilotes (PIT).
2. Revisión de la formulación matemática analítica existente sobre el fenómeno de propagación unidimensional de ondas.
3. Desarrollo de la implementación analítica que tuviera en cuenta las variables necesarias para su adaptación a los pilotes.
4. Utilización del programa MATLAB para elaborar el código fuente de la aplicación PITGRAPH.
5. Consecución de resultados de pruebas hechas en campo para diferentes tipos de pilotes y comparación con las simulaciones obtenidas por medio del programa PITGRAPH.
6. Planteamiento de las conclusiones y recomendaciones finales.

Las simulaciones gráficas, desarrolladas en el presente trabajo de grado son el resultado de la elaboración de un programa de propagación de ondas y simulación de la prueba PIT usando el lenguaje de programación de MATLAB.



## 1. LA PRUEBA DE INTEGRIDAD DE PILOTES (PIT)

### 1.1 HISTORIA

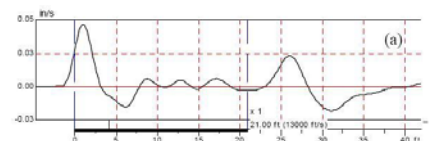
El desarrollo de la prueba dinámica de baja deformación para la determinación de las condiciones de integridad de pilotes, es el resultado de todo un proceso histórico iniciado desde el comienzo mismo en que fueron utilizados estos elementos.

Los pilotes han sido utilizados hasta el día de hoy como elementos de las cimentaciones profundas cuya función es soportar diferentes tipos de estructuras en condiciones geotécnicas muy diversas tanto en tierra como en agua.

Debido a su importante rol como estructuras de soporte, su proceso constructivo o de instalación, sus costos y las posibles consecuencias desastrosas ante su posible falla, ha surgido la necesidad de hacer una evaluación de los mismos de acuerdo al estado del arte y conocimiento que se tenga en el momento.

Inicialmente se utilizó para el análisis dinámico la adaptación de la teoría Newtoniana de impacto en cuerpos rígidos (Hussein, 2004 [11]) y actualmente, debido a la pérdida de fuerza de dicha teoría, se ha determinado que el hincado de pilotes, al igual que la prueba sónica de baja deformación, están mejor representados por la teoría de propagación unidimensional de ondas bajo los principios de ondas mecánicas en barras elásticas.

En la Referencia [11] se realiza una descripción detallada de los acontecimientos históricos que han llevado a la aplicación de la teoría de propagación unidimensional de ondas en pilotes a los avances y tecnologías de la actualidad. A continuación se hará una breve síntesis histórica sobre la prueba de integridad de baja deformación.





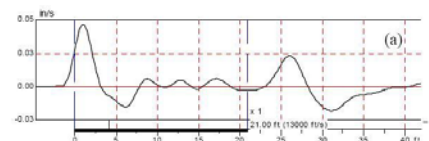
La prueba de integridad de baja deformación tuvo el inicio de su desarrollo e investigación a partir del año de 1929 con el ruso Solokov. Solokov sugirió el uso cuantitativo de las ondas ultrasónicas para determinar la ubicación de elementos metálicos. Posteriormente, después de la Segunda Guerra Mundial, Firestone de la Universidad de Michigan en Estados Unidos e independientemente Sproule en Inglaterra, sugirieron el uso de detectores de ecos por pulsos ultrasónicos de baja deformación para detectar fallas en materiales homogéneos.

El desarrollo de métodos para probar concreto, tuvo una importante publicación en la revista del Instituto Americano del Concreto en 1949 con el artículo: "Ultrasonic Method of Studying Deterioration and Cracking in Concrete Structures".

Ya para la época de 1960, el Francés Jean Paquet realizó los primeros trabajos prácticos en el Centro CEBTP (Centre Experimental de Recherche et d'Études du Batiment et des Travaux Publics) sobre la aplicación de la prueba de integridad no destructiva de cimentaciones usando un vibrador masivo pegado a la punta del pilote dentro de un rango de frecuencias. Para el año de 1974 Paquet aplicó para la patente del método basado en el análisis de onda de esfuerzos en el dominio de la frecuencia. Paquet posteriormente aplicó el mismo método para realizar mediciones del impulso inducido por el martillo.

Los equipos de pulso sónico empezaron a ser dotados de geófonos y osciloscopios en el dominio del tiempo. Debido a las mejores características de respuesta, la mayoría de las pruebas de integridad de baja deformación empezaron a usar acelerómetros como dispositivos que detectaban el movimiento en la punta del pilote y la mayoría de los registros obtenidos empezaron a ser analizados en el dominio del tiempo. De igual manera el martillo de mano se empezó a instrumentar para los casos que se deseaba realizar el análisis en el dominio de la frecuencia.

Con el posterior desarrollo del registro digital y procesamiento de los resultados, hasta el día de hoy, el análisis de información es posible y sus múltiples aplicaciones han empezado a extenderse.



## 1.2 EQUIPO

El equipo está compuesto por tres herramientas que son necesarias para llevar a cabo la prueba de integridad de baja deformación: un martillo (con o sin sensor de fuerza), un sensor (acelerómetro o geófono) y un procesador (Ver Figura No.7).

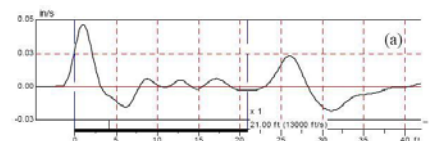
*Figura 7 Herramientas usadas para realizar el ensayo PIT*



*Fuente: <http://web.pile.com/pdi/products/PIT/default.asp>*

**1.2.1 El martillo.** Dependiendo del tamaño del pilote a ser probado, la masa del martillo debe estar entre 0.5 y 5kg. Los martillos más pequeños brindan un menor pulso y un mayor contenido frecuencial, mientras que los martillos más grandes aplican mayores energías a la cabeza del pilote (Rausche. 1992 [23])

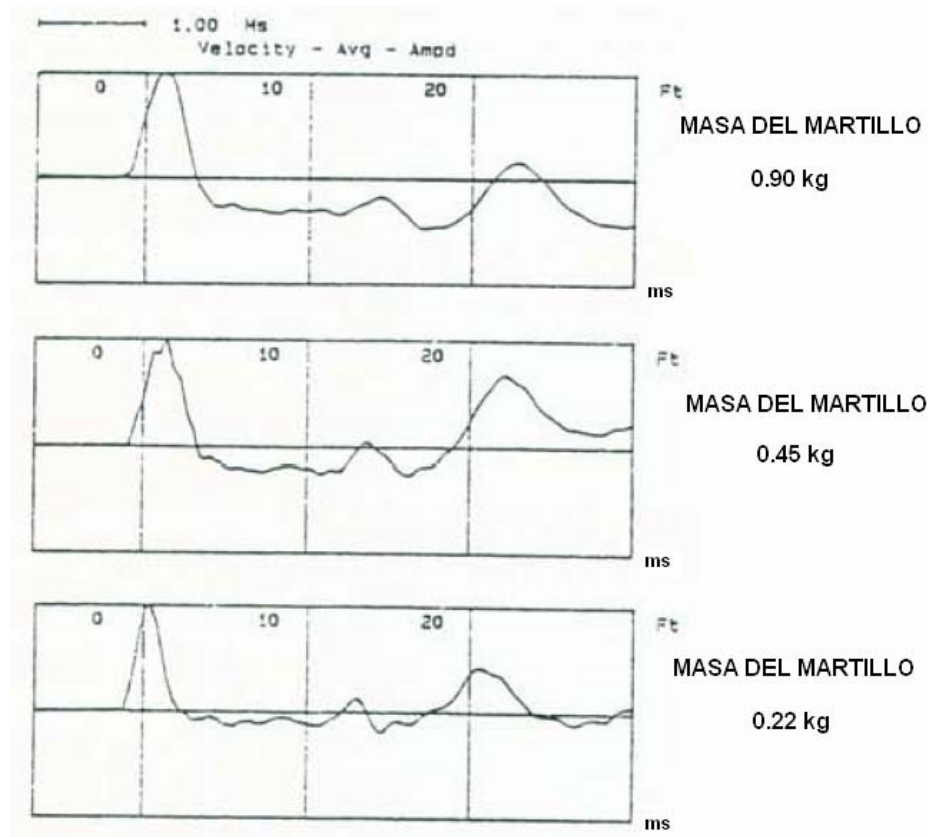
Los pulsos de entrada generados por un martillo pequeño, si son claros y angostos, son apropiados para investigar deficiencias de pilotes en distancias cortas a lo largo del fuste en contraste con los pulsos más amplios. Por tanto, los martillos más pequeños son recomendados para tal fin. Para la evaluación de un pilote largo, como más energía se pierde en la propagación de la onda, se recomienda utilizar martillos más grandes. Actualmente, se tiende a realizar la prueba con diferentes tamaños del martillo.



El pequeño tiende a revelar más detalle sobre los cambios de sección del pilote, mientras el martillo más grande es capaz de generar una reflexión de onda más clara en la punta del mismo.

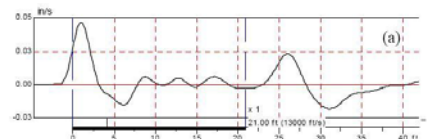
En la figura No.8 se muestran algunos resultados de pruebas realizadas con el equipo PIT en donde se ven las gráficas de la velocidad vs.tiempo obtenidas con tres tamaños de martillos en un pilote de 50cm de diámetro, 6.1m de longitud y un defecto a 4m de profundidad.

*Figura 8 Señales obtenidas en un pilote con martillos diferentes*



*Fuente: Adaptado de [23] Rausche. 1992*

Como se puede observar el martillo más pequeño no tuvo una señal lo suficientemente clara como la del martillo de tamaño medio. Por otra parte, el martillo más grande no mejoró la



calidad de la señal en la pata del pilote, comparado con la obtenida con el martillo mediano que sería en éste caso la mejor selección para probar dicho pilote.

Durante el ensayo, se debe instrumentar el punto del ensayo para medir la fuerza aplicada. Para lograr tal fin se emplean dos sistemas principalmente: El sensor de presión y el acelerómetro. El sensor de presión está localizado entre la masa del martillo y la superficie de impacto, mientras que el acelerómetro está pegado rígidamente a la cabeza del pilote como se puede observar en la figura No.5.

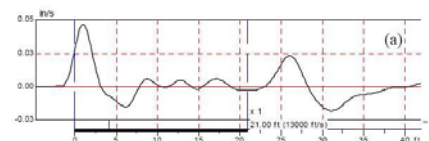
Típicamente, la fuerza medida es mil veces mayor que el peso del martillo, por tanto los martillos más grandes alcanzan un valor pico momentáneo de hasta 50kN (Rausche. 1992 [23])

**1.2.2 El sensor del Movimiento.** Los sensores de movimiento son acelerómetros o geófonos. La información de aceleración obtenida con el acelerómetro contiene implícitamente información de la velocidad al ser integrada posteriormente. Por su parte, los geófonos producen de manera directa una señal de velocidad.

Tanto los acelerómetros como los geófonos tienen diferentes propiedades en diferentes rangos de frecuencias. Los acelerómetros, por ejemplo, brindan resultados más confiables en frecuencias altas. Los geófonos tienen un rango de frecuencia más bajo pero no requieren los cálculos de una constante de integración (Rausche. 1992 [23]).

Los geófonos son generalmente más pesados que los acelerómetros y por tanto presentan mayor dificultad en el momento de realizar la prueba.

**1.2.3 Procesadores.** El desarrollo de procesadores ha avanzado en la medida que las técnicas de análisis lo ha hecho también. El pulso sónico fue originalmente visto únicamente en el dominio del tiempo en un osciloscopio análogo, los resultados posteriores fueron

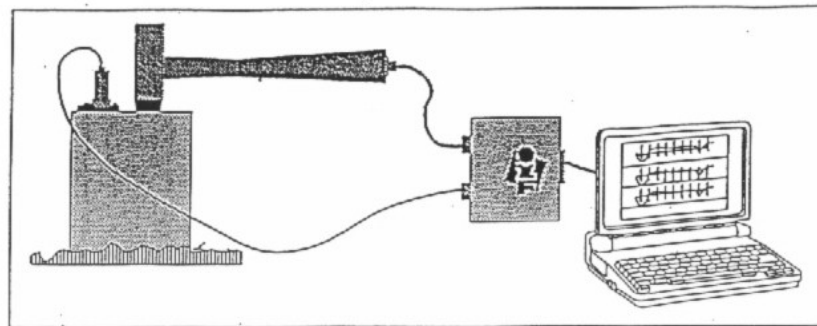


obtenidos usando computadores personales, y hoy en día toda la colección de datos usa una unidad especializada (Rausche. 1992 [23])

La pantalla de la unidad especializada muestra menús intuitivos para guiar al usuario y muestra las señales gráficas para interpretación en campo.

La Figura No.9 muestra el "Colector PIT" en la cual las condiciones de señal del martillo y los sensores de movimiento, guardan la información para una posterior transferencia al computador que luego ejecuta los cálculos para su interpretación y elaboración de graficas de los datos procesados.

*Figura 9 Disposición del ensayo sónico con martillo instrumentado*

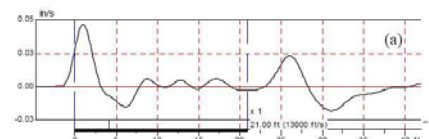


*Fuente: [9] FERNÁNDEZ. 2000*

Los modernos computadores ejecutan el análisis de la transformada rápida de Fourier (FFT) y son por tanto apropiados para cálculos en el dominio de la frecuencia y tiempo.

### 1.3 NORMATIVIDAD DEL ENSAYO

El ensayo de integridad de baja deformación debe estar encaminado a comprobar la calidad de los elementos construidos y/o instalados teniendo en cuenta las observaciones



del ingeniero contratista interesado en la ejecución del ensayo y del ingeniero geotecnista que lo asesore para tal fin.

Aunque en Colombia no existe una norma técnica que estandarice la prueba y que exija unos requisitos mínimos en su ejecución y análisis, en otras partes del mundo ya existen diferentes estándares y códigos que pueden ser tomados como referencia para llevar a cabo la prueba de una manera integral.

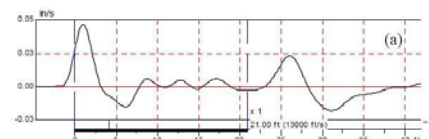
En la referencia [1] se hace una completa investigación sobre los diferentes códigos y estándares que sobre las pruebas dinámicas de pilotes existen en el mundo. El siguiente cuadro realiza una compilación sobre los estándares y códigos más importantes que existen para las diferentes pruebas de integridad.

*Tabla 2 Estándares y códigos para pruebas de integridad en pilotes en el mundo*

MÉTODO	PAÍS	REFERENCIA	TÍTULO
LST (PIT), CSL	Australia	Australian Standard AS 2159-1995	Pile-Design and Installation
LST (PIT), CSL	China	JGJ 94-94	Technical Building Pile Foundation Chapter 9: Inspection and Acceptance of Pile Foundation Engineering 9.1: Quality Inspection of Pile Insatallation
LST (PIT), CSL	China	JGJ/T 93-95	Specification for Low Strain Dynamic Testing of Piles
LST (PIT)	Francia	Norme Francaise NFP 94-160-2 NFP 94- 160-4	Soil: investigation and testing Auscultation of buried work Method by reflection/impedance
CSL	Francia	Norme Francaise NFP 94-160-1	Soil...(Lo mismo de arriba) Sonic Core Test
LST (PIT), CSL	Alemania	DGGT	Empfehlung Integritätsprüfungen
LST (PIT), CSL	Inglaterra	Institution of Civil Engineers (ICE)	Specification of Piling
LST (PIT)	Estados Unidos	ASTM D 5882	Standard test method for low strain integrity testing of piles.

LST=Low Strain Dynamic Pile Integrity Testing  
CSL= Cross Hole Sonic Logging

*Fuente: Adaptado de [1] BEIM. 1998*





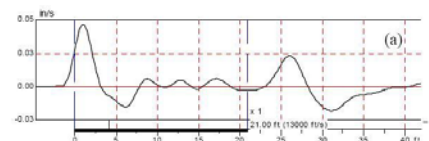
De manera particular, la normatividad China menciona algunos aspectos importantes que otras normas no consideran. Por ejemplo, en la norma JGJ 94-94 que hace referencia al ensayo de integridad se afirma que:

*“El aseguramiento de la calidad en la instalación de pilotes debe llevarse a cabo para la ingeniería de fundaciones de edificaciones de primer grado, condiciones de suelo complejas o dudosa calidad en la instalación de pilotes. La inspección de la calidad debe ser ejecutada por medio de métodos dinámicos confiables. El ensayo Cross Hole sonic Logging debe ser usado para pilotes de diámetro ancho. El número de pilotes a ser probados es una decisión tomada por el diseñador si la situación lo amerita.” BEIM. Et al.1998 [1].*

Adicionalmente, dicha norma menciona que el número de pilotes que deben ser probados deben ser por lo menos el 20% del total de los pilotes existentes y no menor a 10 pilotes. Si más del 30% de los pilotes probados tienen fallas, se deben probar el doble de los pilotes probados hasta el momento. Por último si aún más del 30% de los pilotes presenten fallas, todos los pilotes instalados deben ser probados.

Las anteriores consideraciones para la realización de la prueba son de difícil práctica en el medio Colombiano en donde se realizan algunos ensayos sobre los pilotes considerados como representativos. Aunque el valor unitario de ejecución de la prueba no es muy alto, la muestra estadística realizada no alcanza las exigencias mínimas de la normatividad China y más bien se siguen las recomendaciones dadas por LIKINS, 2000 [14], quien describe que:

*“Frecuentemente se realiza un muestreo estadístico y si no se encuentra alguna novedad se termina la inspección. En el momento en que se encuentran pilotes defectuosos se justifica la realización de pruebas adicionales en pilotes vecinos. La selección de los pilotes a ensayar puede ser basada en varias observaciones del ingeniero ejecutor del ensayo, considerando redundancia del pilote o de manera aleatoria”.*



Es importante resaltar que en China, al igual que en otros países, para ejecutar ensayos dinámicos en pilotes se debe estar certificado por medio de pruebas técnicas y teóricas organizadas por las autoridades competentes.

Por su parte, la normatividad Inglesa hace la advertencia sobre la necesidad de que los resultados de la prueba de integridad sean interpretados por ingenieros especialistas con experiencia ya que el método tiene sus limitaciones, como ya se ha mencionado.

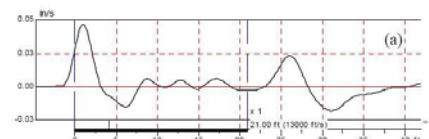
Tal vez lo que más caracteriza la normatividad inglesa es que señala responsabilidades al indicar quién debe pagar por las pruebas en caso de que los defectos sean encontrados. En este orden de ideas se menciona que:

*“En el evento que las pruebas de integridad indiquen defectos potenciales en un pilote y las pruebas subsecuentes prueben que los pilotes tienen fallas, entonces los costos para posteriores pruebas de investigación, trabajos de mejora y/o reemplazo del pilote defectuoso deben ser asumidos por el contratista. Si después de realizar la investigación, las pruebas posteriores no revelan defectos significantes, los costos de dichas pruebas adicionales deben ser asumidos por el contratante” BEIM. Et al.1998 [1].*

## 1.4 EJECUCIÓN

Los pilotes deben estar descabezados o accesibles en el momento del ensayo y sin suciedad u otros residuos. El concreto no tendrá, en general, menos de una semana en el momento del ensayo.

Para su ejecución se requiere que la cabeza del pilote sea de concreto sano y compacto. La cabeza del pilote se prepara por medio de la remoción y limpieza de concreto en la superficie de tal manera que si está contaminado con suelo, bentonita u otro tipo de material extraño durante la construcción, se pueda trabajar sobre una superficie homogénea y limpia. El acelerómetro es fijado posteriormente sobre la superficie



preparada con una pequeña película de pasta suave como vaselina, plastilina, cera, u otro material similar. Dicho tratamiento preliminar se puede observar en la foto de la figura No.10

*Figura 10 Limpieza de la cabeza del pilote y ubicación del acelerómetro*



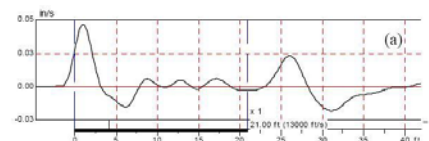
*Fuente: Prueba de campo*

Antes de realizar los golpes con el martillo seleccionado, se debe configurar el procesador con información del pilote a ensayar. La información preliminar para alimentar el procesador corresponde a propiedades tales como, identificación del pilote, longitud, diámetro de diseño y velocidad de propagación de la onda.

Luego de haber realizado los pasos anteriores se realizan diferentes golpes con el martillo de mano desde una misma altura procurando que sean realizados con la misma energía de impacto.

Las aceleraciones de varios golpes del martillo se normalizan, integran, promedian y se muestran como velocidades en el monitor del procesador de la prueba. Estos son almacenados para su posterior análisis.

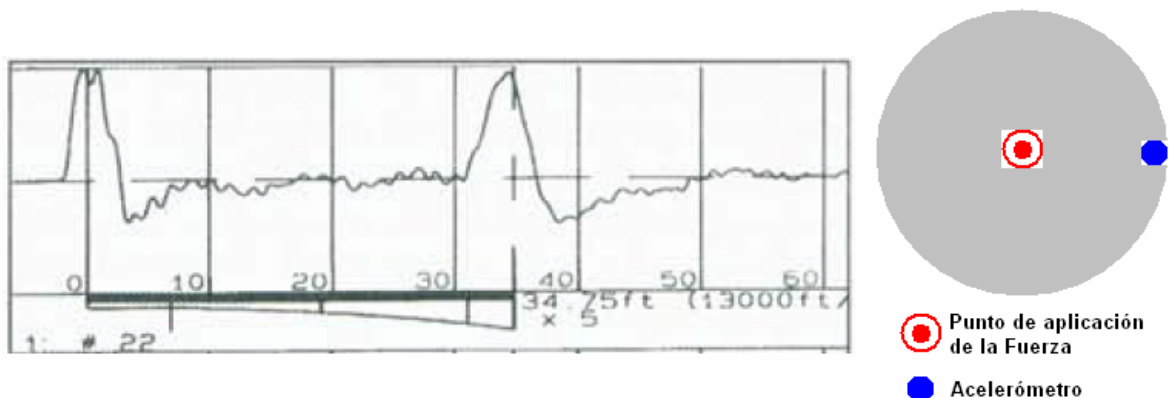
Es importante disponer de un plano con la identificación de los pilotes y el registro de su longitud aproximada, y posibles incidencias durante el proceso constructivo.



Durante el ensayo, se debe tener en cuenta algunas consideraciones especiales de ubicación del golpe del martillo y localización del acelerómetro que pueden afectar las señales obtenidas. LIKINS en la referencia [14], hace un análisis completo de la importancia de ubicar de manera adecuada los instrumentos para la obtención de información representativa del pilote por medio de diferentes pruebas.

En los siguientes tres registros que Likins obtuvo, se analizaron algunas variaciones que presentó la señal de respuesta en la cabeza ante diferentes puntos de aplicación de la fuerza y ubicación del acelerómetro.

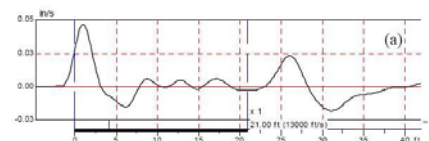
*Figura 11 Señal obtenida de la aplicación de la fuerza en el centro del pilote y acelerómetro ubicado en el borde del mismo*



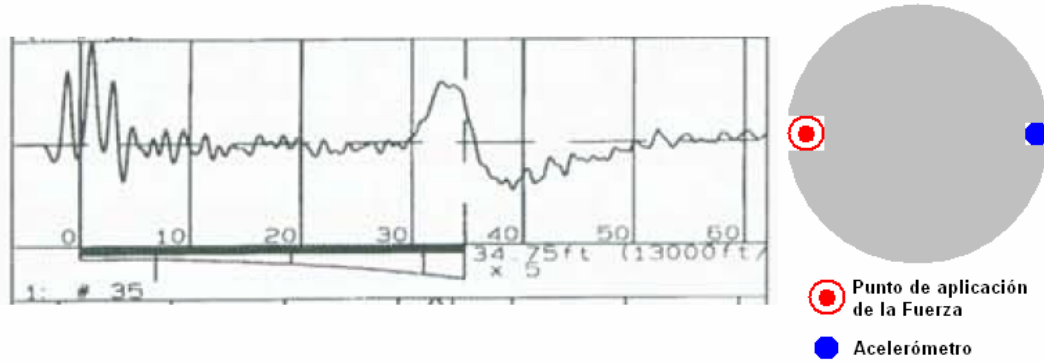
*Fuente: Adaptado de [14] LIKINS, 2000.*

De la anterior figura, la gráfica es el resultado de un golpe de martillo aplicado en el centro del pilote, mientras que el acelerómetro estuvo ubicado en el borde del pilote.

La siguiente figura corresponde a la respuesta cuando el acelerómetro es ubicado de nuevo en el borde del pilote y la fuerza es realizada en el borde opuesto



*Figura 12 Señal obtenida de la aplicación de la fuerza en un borde del pilote y acelerómetro ubicado en el borde opuesto*

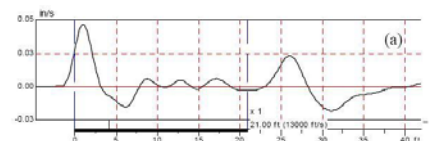


*Fuente: Adaptado de [14] LIKINS, 2000.*

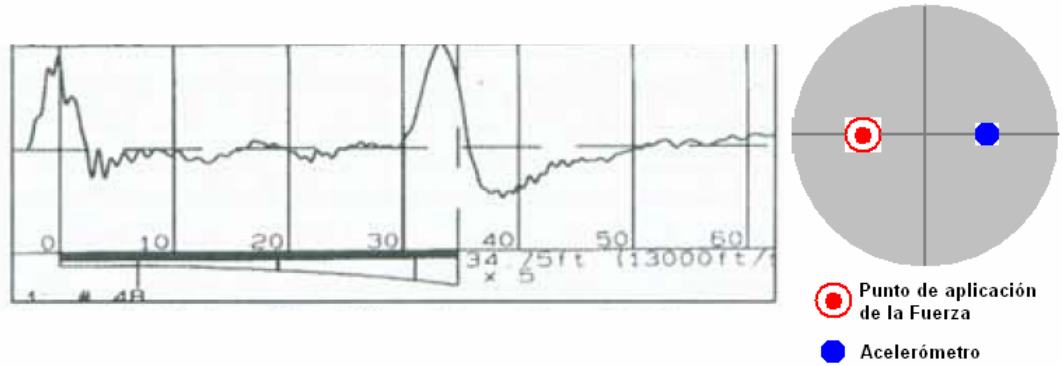
La anterior configuración para realizar el ensayo es la menos deseable por su alta variabilidad en la señal como se muestra.

Por último, en la gráfica presentada en la figura 13 la configuración del punto de aplicación de la fuerza y ubicación del acelerómetro es a  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{3}{4}$  del diámetro como se indica esquemáticamente a su derecha.

Se puede ver que de las configuraciones de ubicación del golpe del martillo y acelerómetro la más recomendable es la presentada en la figura 13 por su claridad y representatividad en la señal obtenida.



**Figura 13** Señal obtenida de la aplicación de la fuerza a  $\frac{1}{4}$  del diámetro del pilote y  
 acelerómetro ubicado a  $\frac{3}{4}$  del mismo diámetro

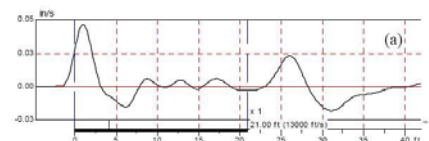


*Fuente: Adaptado de [14] LIKINS, 2000.*

La calidad de la información no es la única consideración a tener en cuenta para la ubicación del acelerómetro y el punto de aplicación de la fuerza con el martillo.

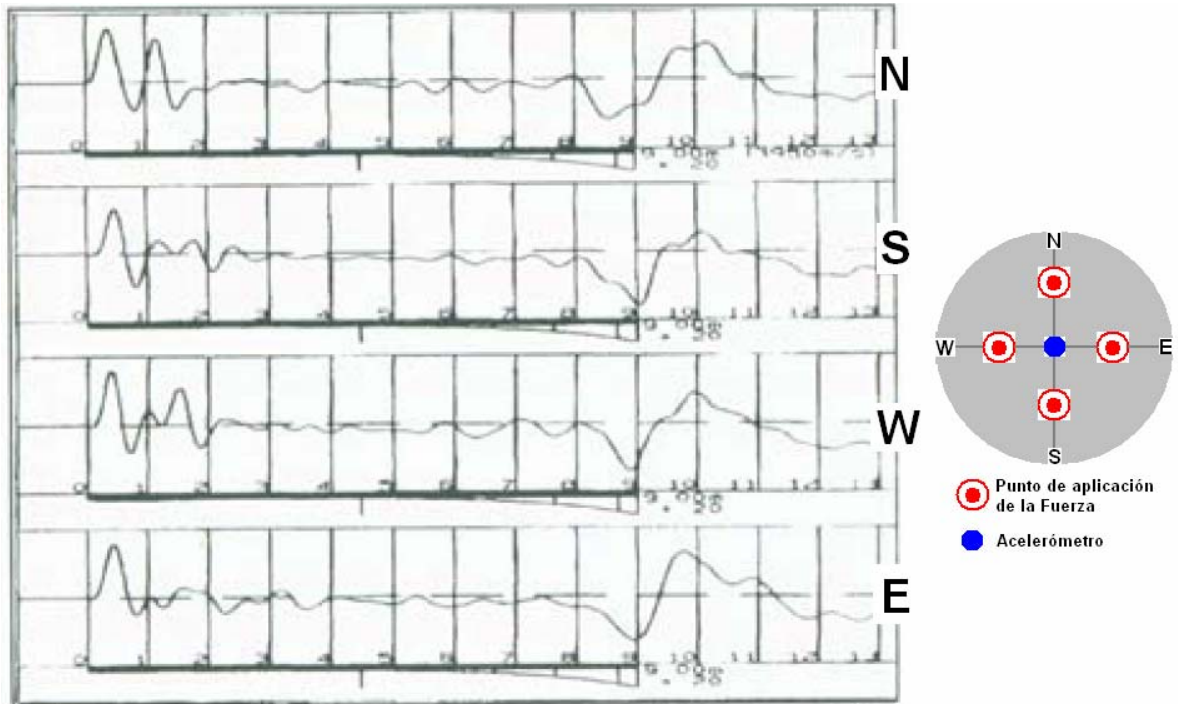
La figura 14 muestra cuatro registros para un pilote de 80cm de diámetro en los cuales el acelerómetro se ubicó en el centro del pilote y el impacto del martillo se llevó a cabo alrededor del pilote en los cuatro puntos cardinales: Norte (N), Sur (S), Oriente (E) y Occidente (W).

Ante los resultados mostrados en la anterior figura, se puede identificar fácilmente que existe un defecto local cerca de la cabeza del pilote en el cuadrante nor-occidental (NW).





*Figura 14 Señales obtenidas de la aplicación de la fuerza en los cuatro puntos cardinales (N, S, W, E) y acelerómetro ubicado en el centro del pilote*



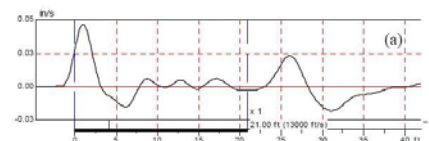
Fuente: Adaptado de [14] LIKINS, 2000.

## 1.5 ARREGLO DE INFORMACIÓN

Luego de realizar la prueba y haber guardado la información de las señales de respuesta para cada pilote, se lleva a cabo un arreglo de la información para su mejor interpretación sin llegar a alterar la información original y relevante del pilote.

Para lograr la interpretación de la velocidad en la cabeza del pilote, ésta se mejora con unas pocas transformaciones que se describirán a continuación.

**1.5.1 Amplificación y Filtrado.** El procesamiento de información incluye la aplicación de una función de amplificación exponencial. Dicha amplificación muestra con mayor detalle



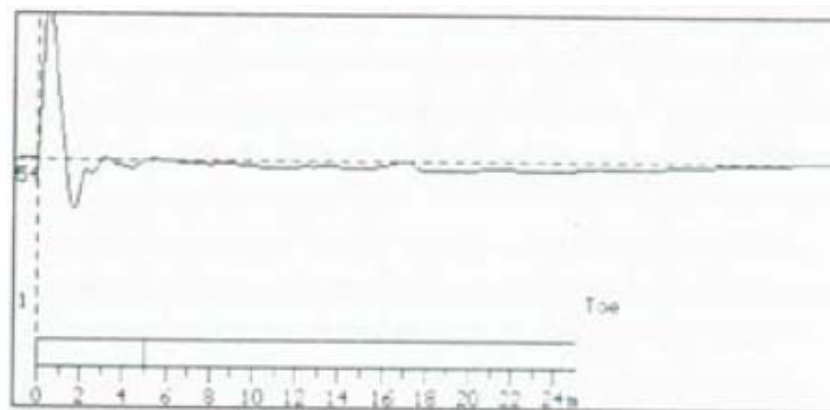
las reflexiones que son disminuidas por la resistencia del suelo, amortiguamiento propio del material del pilote y cambios de impedancia.

En general, las reflexiones relativamente claras son atribuidas a cambios de impedancia, mientras que cambios de reflexiones pequeños son usualmente causados por la resistencia del suelo. Si los efectos de la resistencia del suelo son conocidos de otras pruebas en pilotes de referencia, se pueden identificar pilotes inusuales. Este método puede ser aplicado a casi cualquier pilote. LIKINS (2000 [14])

Una “señal cruda” de un pilote defectuoso se muestra en la figura 15 en donde la interpretación se hace difícil debido a que la resistencia del suelo y pilote han amortiguado enormemente las señales de reflexión.

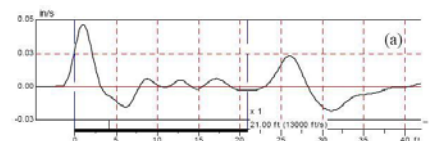
La interpretación se hace difícil debido a que la resistencia del suelo ha disipado enormemente las señales de reflexión.

*Figura 15 Señal cruda obtenida después de la prueba PIT*



*Fuente: [14] LIKINS, 2000.*

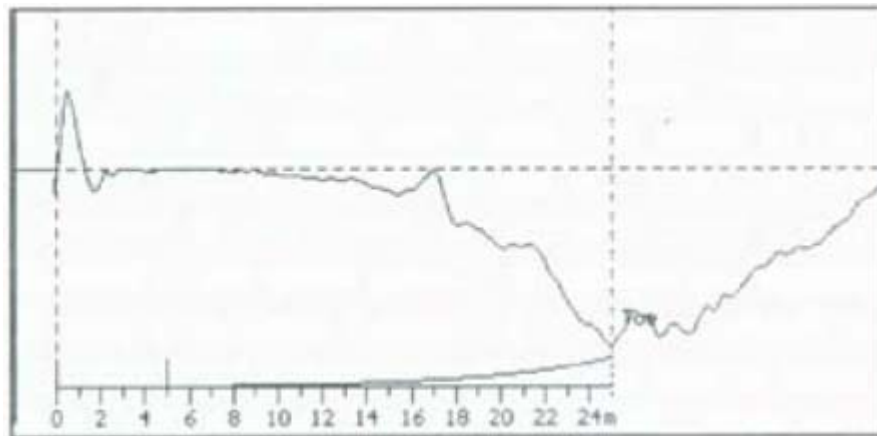
El método estándar para compensar los efectos de amortiguamiento del suelo, es el de aplicar una función de amplificación que comience un poco después del pulso de entrada con un valor unitario y se incremente exponencialmente a algún factor hasta la punta del



pilote. Por medio de la aplicación de estos incrementos de amplificación, señales extremadamente débiles a altas profundidades son más fácilmente detectadas.

La función de amplificación debe ser indicada gráficamente como se muestra en la figura 16.

*Figura 16 Señal con amplificación únicamente*

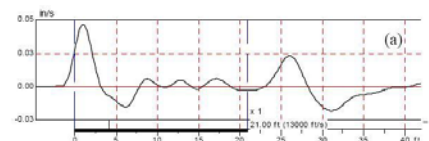


*Fuente: [14] LIKINS, 2000.*

Los pequeños cambios en la señal obtenida son difíciles de interpretar. Generalmente son el resultado de los efectos de la resistencia del suelo. Sin embargo, el verdadero fin de la prueba de integridad es evaluar la integridad estructural de los pilotes, luego los efectos producidos por la resistencia del suelo no son tan importantes.

Los efectos del suelo se pueden remover por medio de un proceso de filtrado, ya que son eventos de baja frecuencia. Por tal motivo, un filtro denominado High Pass Filter (HPF) es aplicado para removerlos según menciona Likins en la referencia [14].

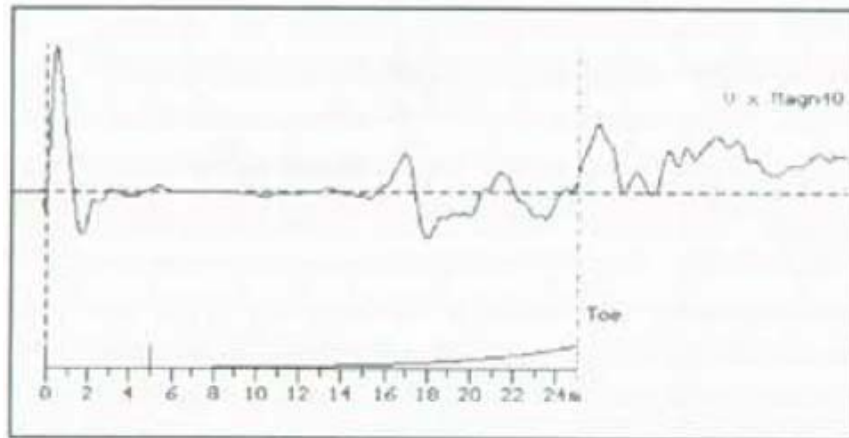
En el caso del ejemplo mostrado en la figura 17, en el que la mayoría de los datos están cercanos a cero después de la amplificación, los datos fueron filtrados con el High Pass Filtering para remover los componentes que tuvieran una menor frecuencia que la definida para el filtrado.



En general, se debe tener cuidado para no aplicar HPF con una frecuencia de filtrado muy grande que pueda eliminar las frecuencias de interés ya que los componentes de frecuencia más importantes son aquellos que muestran el pulso de entrada y los cambios de reflexiones debidos a cambios en las propiedades de los pilotes.

En la siguiente figura se puede apreciar una señal con su correspondiente amplificación y filtrado HPF. Con dichos arreglos, continuar con el análisis es más sencillo al poder evidenciar los defectos de importancia en el pilote.

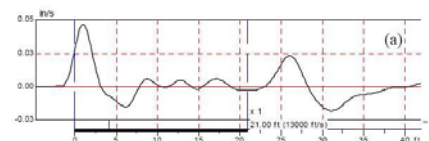
*Figura 17 Señal con 40 amplificaciones y 25 High Pass Filter*



*Fuente: [12] LIKINS, 2000.*

## 1.6 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Dado que el objetivo final de la prueba de integridad de pilotes es la determinación de la longitud real y localización de defectos de importancia se deben tener en cuenta una serie de recomendaciones basadas en la experiencia y teoría física que enmarca la prueba.



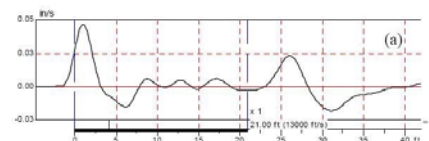
Existen algunos lineamientos generales, muy precisos y puntuales dados en la referencia [18] publicados por la empresa Pile Dynamics, Inc en su página web de los cuales se hace una descripción por su importancia en el análisis de resultados de la prueba PIT.

El documento menciona que inicialmente para identificar la localización de un cambio de sección transversal o reflexión de la punta, la velocidad de la onda en el concreto se debe asumir. Likins en la referencia [14] afirma que usualmente se toma un valor de velocidad de onda en el concreto de 3.960 m/s (13.000 ft/s) pero que existe incertidumbre de alrededor de un 10% para un mismo proveedor de concreto. Sin embargo para lograr un mejor análisis comparativo se toma un mismo valor para los diferentes pilotes evaluados en un sitio.

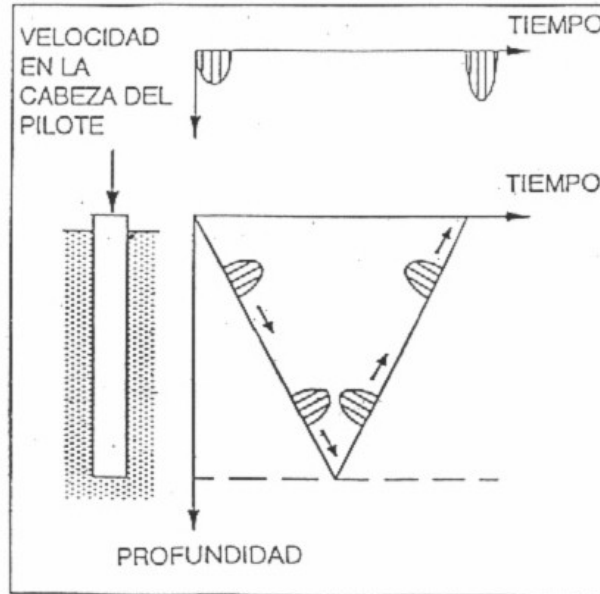
El documento de Pile Dynamics, Inc recomienda realizar el ajuste del valor de la velocidad de onda del concreto en el momento que se identifique la reflexión en la punta.

Al entrar en materia del análisis de la señal de respuesta registrada por el equipo, se pueden identificar un pico positivo inicial correspondiente al pulso de entrada debido al impacto del martillo. Al cabo de un tiempo la velocidad regresa a tomar un valor de cero. En el caso de un pilote perfecto se tendría el pulso inicial positivo seguido de un lapso de tiempo con velocidad igual a cero hasta alcanzar la reflexión en la punta donde se registraría un pulso similar al de entrada que puede ser positivo o negativo en algunos casos. Positivo cuando el pilote se encuentra en un suelo relativamente blando y negativo cuando la punta del pilote se encuentre apoyada por una roca o estrato de alta rigidez.

En la Figura 18 se presenta esquemáticamente el comportamiento del caso más sencillo que puede ocurrir en un pilote.



*Figura 18 Representación del viaje de las ondas sónicas en el pilote*



*Fuente: [9] FERNÁNDEZ, 2000*

Las otras reflexiones observadas en el registro de velocidad son causadas por cambios en la impedancia del pilote definida como:

$$Z = \frac{E \cdot A}{c} \quad (1.1)$$

Donde:

Z= Impedancia

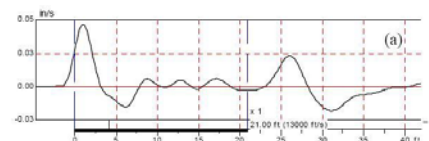
E= Módulo de elasticidad del concreto

A= Sección transversal del pilote

c= Velocidad de onda de baja deformación en el concreto.

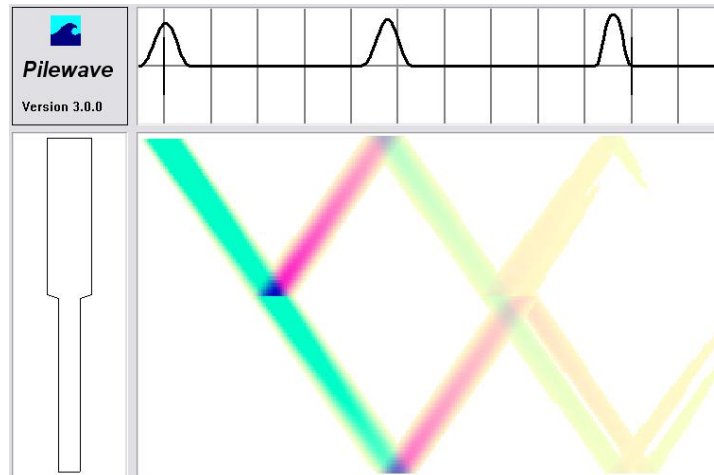
Las reflexiones pueden ser causadas por cambios en la sección transversal del pilote o densidad del material.

Una región con reducción de impedancia muestra una reflexión positiva (igual al pulso de entrada) mientras que un aumento de impedancia genera una reflexión negativa del pulso.



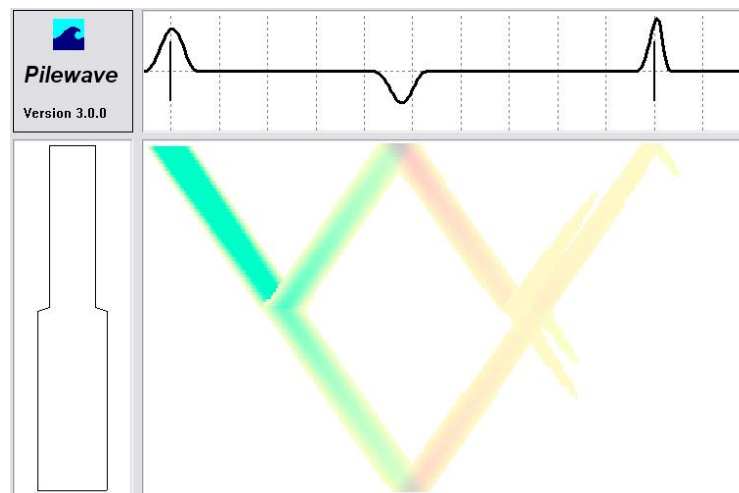
Los anteriores casos se pueden detallar en las simulaciones realizadas mediante el programa didáctico PileWave versión 3.0 disponible en [www.piletest.com](http://www.piletest.com) en las figuras 19 y 20 respectivamente

**Figura 19** Simulación esquemática del efecto de reducción de impedancia en la señal



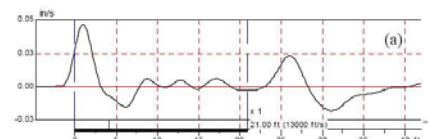
*Fuente: Simulación programa PileWave v.3.0.0*

**Figura 20** Simulación esquemática del efecto de aumento de impedancia en la señal



*Fuente: Simulación programa PileWave v.3.0.0*

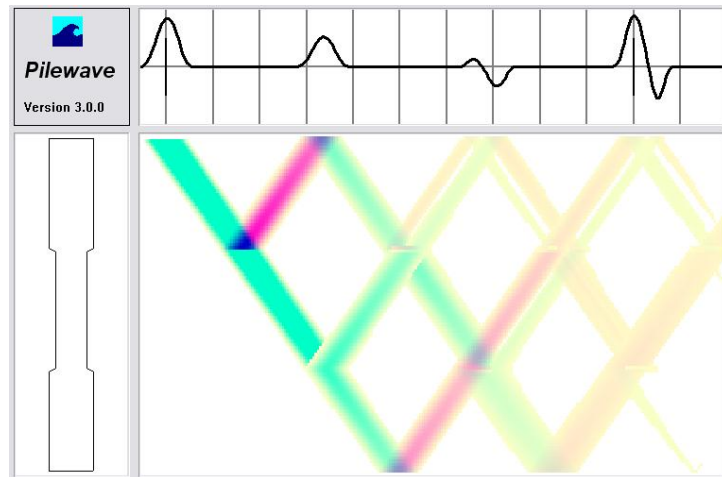
En los casos donde se encuentra en el pilote una reducción local se tendría por tanto una reflexión positiva seguida de una reflexión negativa y por el contrario en el caso de un





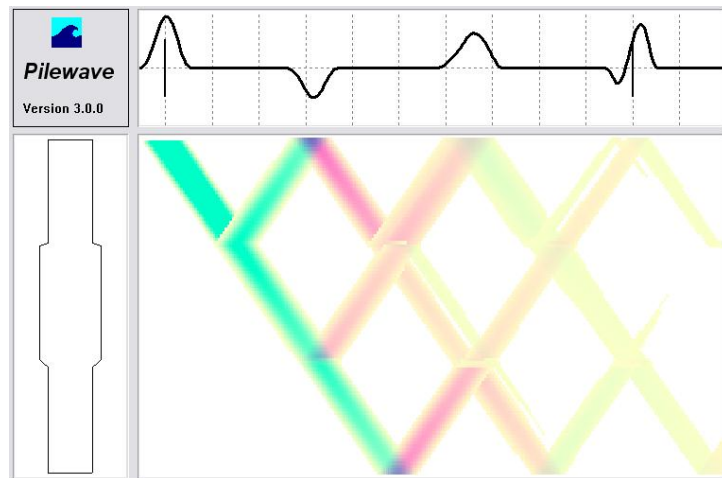
aumento local se tendría una reflexión negativa inicialmente seguida de una reflexión positiva. Ambos casos se pueden observar en las figuras 21 y 22 respectivamente.

*Figura 21 Simulación esquemática del efecto de reducción local en el pilote*

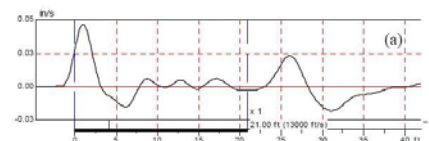


*Fuente: Simulación programa PileWave v.3.0.0*

*Figura 22 Simulación esquemática del efecto de ampliación local en el pilote*



*Fuente: Simulación programa PileWave v.3.0.0*



Las reflexiones deben ser interpretadas para determinar si los cambios de impedancia asociados a ellas son considerados de importancia para la integridad del pilote. La magnitud de la reflexión se relaciona directamente con el cambio de impedancia.

La mayoría de los defectos más serios se encuentran en la parte superior del fuste del pilote. Los defectos más profundos son juzgados con frecuencia como menos serios por la pérdida de energía de la señal inicial, de allí la importancia de una adecuada amplificación de la señal para su correcta interpretación.

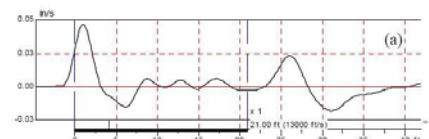
Para evaluar con mayor precisión defectos cerca de la cabeza del pilote se recomienda realizar diferentes golpes en el diámetro del mismo, así como se explicó en el numeral 1.4 sobre ejecución de la prueba.

En el momento que una reflexión sea claramente identificada antes de la llegada de la reflexión debida a la pata del pilote, se deben responder las siguientes preguntas según los lineamientos dados por la empresa Pile Dynamics, Inc en la referencia [21]:

**a) Es clara la reflexión de la punta del pilote?** Al responder esta pregunta se debe tener cuidado ya que la señal de la punta puede ser realmente una reflexión secundaria de un cambio de impedancia si éste cambio se encuentra a la mitad del fuste del pilote. Igualmente, un defecto por encima de la tercera parte del elemento puede generar que una segunda reflexión aparezca en la baja tercera parte y luego en el momento en que se espera aparezca la punta.

La señal debe ser evaluada en todas estas posibilidades ya que cualquier defecto importante es causal de falla estructural de cualquier pilote bajo aplicación de carga.

**b) Son las señales de otros pilotes similares?** En esta pregunta los efectos del perfil del suelo son determinantes ya que la existencia de estratos de suelos duros o blandos puede ocasionar que la forma del pilote no sea uniforme. Por ejemplo, realizar la perforación en un suelo granular suelto puede producir un aumento del diámetro de diseño del pilote y al llegar a un estrato duro cohesivo, la perforación volvería al diámetro nominal. El cambio de un



ancho de diámetro mayor al tamaño original puede aparecer como una reducción pero no significa problema alguno para la calidad del pilote.

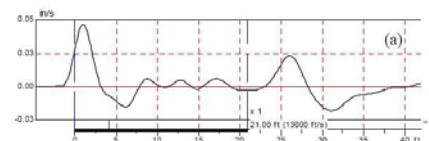
**c) Qué tan cerca de la cabeza del pilote están los cambios?** Si el cambio está muy cerca de la cabeza del pilote, puede generar superposición y traslapeo de ondas para dicha zona. Se recomienda usar un martillo más pequeño para lograr una mejor definición. El mejor método para detectar cambios cercanos a la cabeza del pilote es realizar la medición adicional de la fuerza y compararla con la medición de la velocidad.

**d) Los registros y observaciones durante la perforación y el vaciado del concreto indican problemas potenciales?** Dichos reportes revelan frecuentemente obstrucciones, registros inusuales de vaciado de concreto, juntas frías y otros hechos que ayudan a interpretar las señales obtenidas.

Es importante, que quien realice el ensayo conozca todas las variables que afectan los resultados y las consecuencias de realización de la prueba para poder determinar con autoridad y criterio basado en la experiencia, las acciones a llevar a cabo en pilotes defectuosos.

En la siguiente tabla se resumen las categorías de clasificación de la información de manera cualitativa, con sus posibles diagnósticos y algunas observaciones sobre las señales y criterios de interpretación de las mismas.

Las empresas fabricantes de los equipos para el ensayo por lo general suministran herramientas computacionales para realizar el arreglo de la información para su posterior análisis. En el caso de la empresa Pile Dynamics, Inc que en la actualidad es la empresa más reconocida, dedicada a fabricar equipos y realizar todo tipo de ensayos dinámicos en pilotes, el equipo PIT tiene un software de análisis llamado PIT-W.



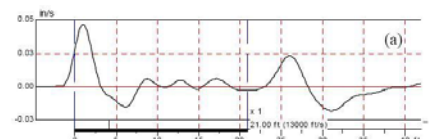
*Tabla 3 Categorías de clasificación de la señal obtenida con el equipo PIT*

CATEGORÍA	SEÑAL OBTENIDA	POSIBLES DIAGNOSTICOS	OBSERVACIONES
<b>A</b>	Reflexión de la punta clara. No existen defectos aparentes	Pilote Bueno	Se asume generalmente que un defecto de menos del 20% de la sección transversal del pilote no es detectado con certeza (considerado como una fortaleza de la prueba al no cuestionar pequeños problemas)
<b>B</b>	Indicación clara de defecto importante. La reflexión de la punta usualmente no es clara	Pilote defectuoso en algún punto. Debe llevarse a cabo un plan de contingencia.	El pilote puede ser abandonado y reemplazado. La decisión depende del costo de un pilote nuevo contra el costo de la reparación
<b>C</b>	Posible pilote defectuoso con aparente reflexión de la punta	El pilote puede presentar reducción en capacidad de carga. Se debe considerar otras pruebas en el pilote o excavación si el defecto es poco profundo	Si el pilote trabaja por fricción y el defecto está muy profundo, la resistencia del suelo por encima del defecto puede compensar la resistencia del defecto y por tanto en algunos casos no es tan importante.
<b>D</b>	Señal sin claridad de la que no se puede concluir.	Baja calidad del concreto en la punta. Pilote muy largo y/o pilote muy irregular	Se recomienda realizar la prueba en un punto donde las condiciones de calidad del concreto sean adecuadas. Estadísticamente es normal encontrar cierto porcentaje de pilotes con señales no concluyentes en donde las condiciones del suelo y el pilote son complejas.

*Fuente: Adaptado de [14] LIKINS, 2000.*

Con dicho programa se pueden realizar comparaciones con otras pruebas realizadas en un sitio para identificar características del fuste del pilote, suelo o determinar la velocidad de la onda en el concreto de manera más precisa. Adicionalmente permite el arreglo de información mediante el filtrado, amplificación constante y exponencial, representación gráfica del perfil de impedancia del pilote, análisis de frecuencias e impresión de resultados.

**1.6.1 Cuantificación del daño del pilote. Método Beta.** En la referencia [23] Rausche describe un método para cuantificar el cambio relativo de una sección transversal del pilote mediante la obtención de las reflexiones que son registradas por la prueba PIT en la cabeza. Haciendo uso de este método se pueden obtener de manera aproximada, el porcentaje de reducción del área en el sector del daño ( $\beta$ ).



La obtención del número beta ( $\beta$ ) está determinada por la relación entre la impedancia por debajo y por encima de un cambio de sección y es fácilmente calculada por la magnitud relativa alfa ( $\alpha$ ) de la reflexión de la onda de impacto.

La magnitud  $\alpha$  está definida como:

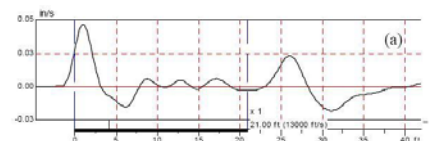
$$\alpha = \frac{V_{daño}}{V_{impacto}} \quad (1.2)$$

Donde,  $V_{daño}$  es la velocidad registrada por la prueba PIT para la reflexión del daño identificado y  $V_{impacto}$  es la velocidad registrada por la prueba PIT para el pulso de entrada en la cabeza del pilote.

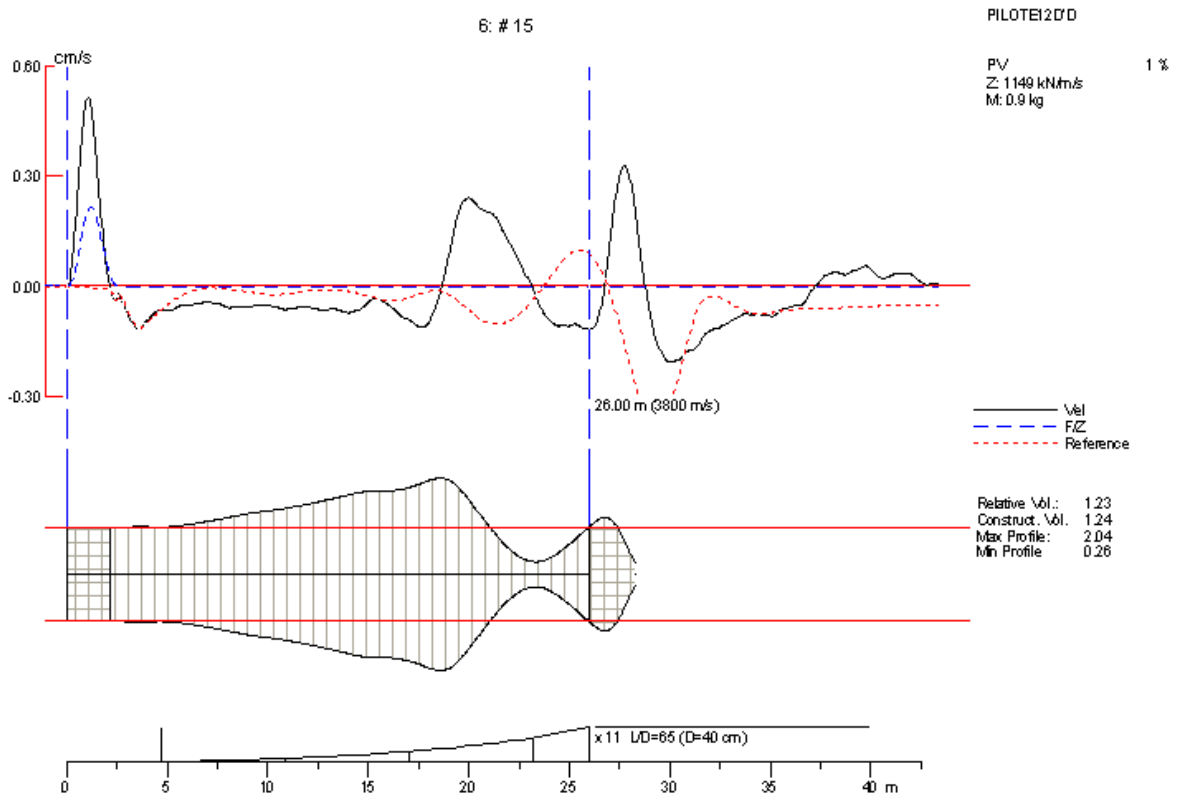
El porcentaje relativo de daño está definido por Rausche en la referencia mencionada como:

$$\beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (1.3)$$

**1.6.2 Cuantificación del daño del pilote. Método del perfil de Impedancia.** Éste método descrito con mayor detalle en la referencia [23] está basado en un algoritmo que lleva a obtener la forma del pilote como una función de la profundidad según el desarrollo de Davis, Herlein en 1991. En vez de tener en cuenta los valores pico de velocidad por presencia de defectos como en el anterior método, el perfil de impedancia se calcula directamente como una integral de la señal reflejada del pulso por el impacto del martillo. En la siguiente figura se muestra un ejemplo del perfil de impedancia que se obtiene para una señal con reducción de impedancia mediante el programa PIT-W de la empresa Pile Dynamics, Inc.



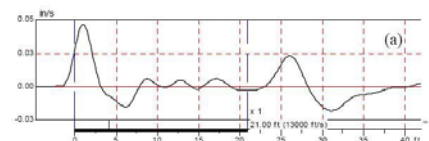
**Figura 23** Perfil de Impedancia obtenido mediante el programa PIT-W para una señal con reducción de impedancia.



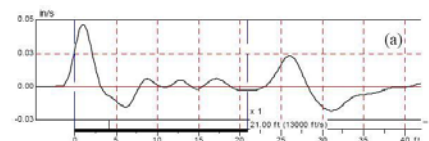
*Fuente: Resultados programa PIT-W*

## 1.7 LIMITACIONES Y CONSIDERACIONES PARA LA INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

El ensayo de integridad de pilotes es una herramienta muy útil por ser una prueba económica y sencilla que localiza defectos de importancia en pilotes. A pesar de su versatilidad presenta algunas limitaciones y consideraciones que se tienen que tener en cuenta para una correcta ejecución, procesamiento y análisis de resultados.

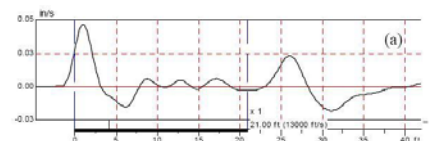


- En casos donde existen juntas mecánicas o grietas que atraviesan la sección del pilote, la onda no puede cruzar tal discontinuidad y por tanto tan solo se puede probar el segmento por encima de dicho defecto.
- Los defectos que son pequeños comparados con el ancho de la señal de entrada y que no atraviesan la sección transversal del elemento pueden confundir la interpretación de la señal por presentar una reducción y ampliación sucesivas. Un problema similar ocurre cuando existen cambios graduales en la sección transversal del pilote que generan a su vez, cambios relativos en la señal. En el procesamiento normal de la señal, se remueven las reflexiones de cambios graduales debido a que éstas poseen un contenido de frecuencias parecido al producido por los efectos del suelo.
- Es importante comparar cualquier resultado PIT con el perfil general del suelo para determinar su incidencia en los resultados. Lo anterior se hace indispensable ya que a veces se registran defectos que en realidad indican pilotes que gradualmente incrementan su sección transversal y luego rápidamente regresan al diámetro nominal como resultado de un estrato de suelo más denso.
- Toda interpretación debe considerar la curva de vaciado de concreto, la longitud de construcción del pilote, el volumen del material excavado, problemas que sucedieron durante la construcción del pilote e información adicional registrada durante la construcción del pilote que ayude a interpretar la señal. Tal información es de suma importancia para tener una mejor interpretación de la señal.
- Para identificar la localización de las ondas reflejadas en la longitud del pilote, la velocidad de la onda debe establecerse de manera exacta. Esta velocidad depende de la resistencia del concreto y por lo tanto también de la edad del pilote ensayado. Si la reflexión de la punta del pilote se observa exactamente en la señal, la velocidad  $c$ , de la onda debe ser ajustada de manera que la punta del pilote se observe a una distancia  $L$ , que es la longitud del pilote.





- Existe un concepto generalizado para la efectividad de la prueba que dice que está restringida para pilotes con longitud menor a 30 veces su diámetro (relación L/D), aunque algunas mejoras electrónicas de la prueba en la actualidad permiten mayores efectividades y precisiones. La anterior efectividad se puede ver disminuida igualmente, por suelos arcillosos duros en donde la señal puede registrar información de tan solo la parte superior del pilote si éste es muy esbelto.
- La efectividad en la investigación de la longitud del pilote depende no solamente de la disipación de la señal debida al suelo, sino también de los cambios de sección y calidad del pilote por las reflexiones de la onda que estos producen. El primer cambio de sección encontrado va a ser el que mayor información confiable va a poseer comparado con el resto de defectos por debajo de éste ya que se va perdiendo energía a medida que la onda viaja, se refleja y transmite sumado al efecto de pérdida de la calidad del pulso de entrada con la profundidad.
- Pilotes que no presentan uniformidad en su sección transversal producen señales muy complejas para su análisis para lo cual se recurre a ensayar pilotes cercanos en condiciones similares para su comparación.
- Debido a su naturaleza, el ensayo no brinda ningún tipo de información relativa a la capacidad de carga del pilote. Para ello se requiere la ejecución de otro tipo de ensayos como por ejemplo la prueba de carga estática o dinámica.
- Los defectos cerca de la cabeza del pilote muchas veces se superponen a la señal de impacto que es dada por el martillo y son difíciles de interpretar, pero si estos defectos se encuentran cerca de la superficie, estos pueden ser investigados en muchos de los casos, por medio de una excavación en el pilote.
- La reflexión de la punta algunas veces no se obtiene claramente si el pilote tiene cambios significativos y/o numerosos de impedancia a lo largo de su fuste.



## 2. PROPAGACIÓN DE ONDAS LONGITUDINALES EN PILOTES

Los sistemas mecánicos que tienen su masa y fuerzas elásticas distribuidas, como en el caso de los cables, barras, vigas y platos, al ponerse en vibración su comportamiento está gobernado por ecuaciones diferenciales parciales, y en su análisis los materiales se asumen que son homogéneos e isotrópicos que obedecen las leyes de Hooke de elasticidad.

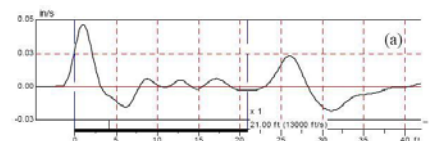
Los pilotes por su parte, clasifican dentro de dichos sistemas mecánicos y por tanto su comportamiento dinámico puede ser analizado haciendo uso de la teoría de propagación unidimensional de ondas longitudinales en barras.

### 2.1 PRINCIPIOS DE PROPAGACIÓN DE ONDAS DE ESFUERZOS

La prueba de integridad de pilotes usa la propagación de ondas de esfuerzos para evaluar la integridad del fuste del elemento esbelto.

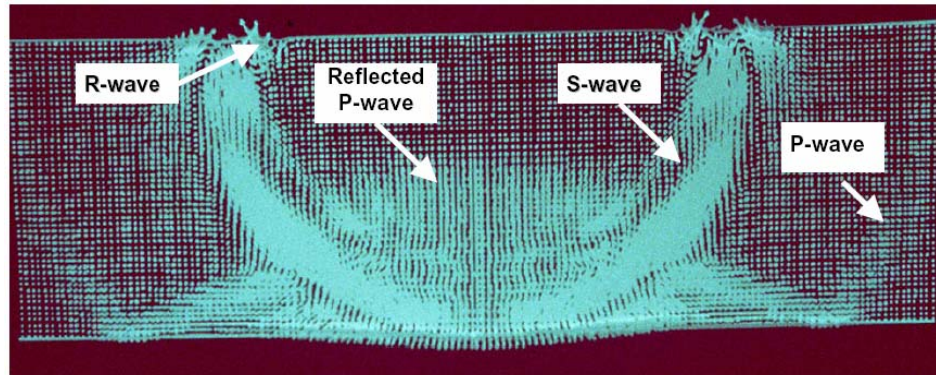
Existen en general tres tipos de ondas de esfuerzos generadas ante la perturbación que es aplicada lentamente en un sólido elástico (como el concreto a bajas deformaciones) y que causa distorsión en el medio en el que las ondas se propagan. Dichas ondas que se irradian en todas direcciones desde el punto de perturbación incluye ondas de dilatación, ondas de distorsión y ondas superficiales. (FINNO, 1997 [10])

Las ondas de dilatación son llamadas frecuentemente como ondas de compresión y conocidas más comúnmente como ondas primarias (ondas P) o ondas longitudinales. Las ondas de distorsión se conocen como ondas de corte, ondas secundarias (ondas S) u ondas transversales. De igual manera en la superficie del elemento elástico las ondas generadas que se propagan sobre la superficie y penetran muy poco en profundidad del medio son



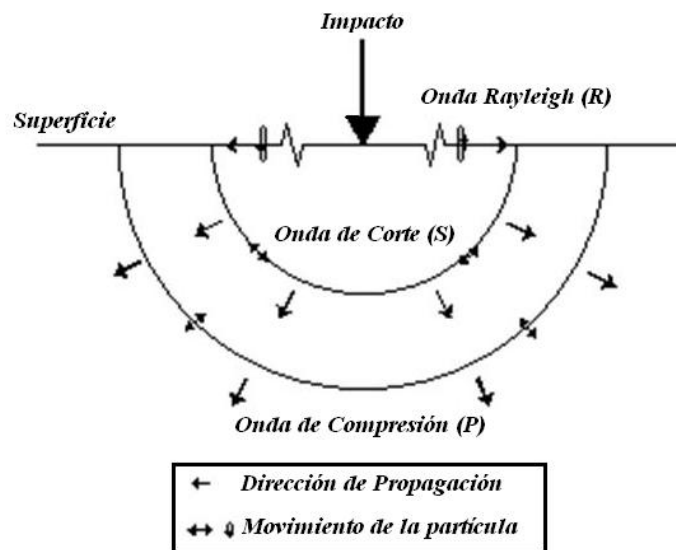
conocidas como ondas tipo Rayleigh (ondas R). Los anteriores tipos de ondas se pueden observar en las figuras 24 y 25.

*Figura 24 Simulación en elementos finitos de propagación de ondas ante un impacto en una placa*

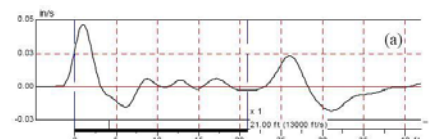


Fuente: [2] CARINO, 2001

*Figura 25 Frentes de onda de compresión, corte y Rayleigh producidas por un impacto puntual en una superficie*



Fuente: [10] FINNO, 1997



Como se puede observar en dichas figuras, las ondas de compresión y corte se distinguen por la dirección del movimiento de la partícula con respecto a la dirección que el frente de onda se propaga. Las ondas de compresión se propagan paralelo a la dirección del movimiento de la partícula, mientras las ondas de corte pueden viajar perpendicularmente a la dirección de propagación. En el caso de las ondas Rayleigh la amplitud decrece exponencialmente desde el punto de impacto.

**2.1.1 Velocidad de Propagación de onda.** La velocidad de propagación de ondas de esfuerzo a través de un medio elástico infinito es una función de las propiedades de los materiales del medio, y depende del módulo de elasticidad ( $E$ ), relación de Poisson ( $\nu$ ) y la densidad del material ( $\rho$ ). En un sólido infinito, la velocidad de onda de compresión ( $c_p$ ) está dada por la siguiente ecuación:

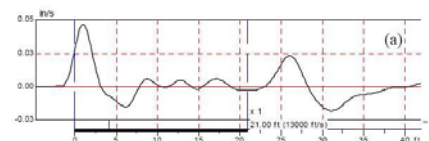
$$c_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) es apropiada para calcular la velocidad de onda de compresión que viaja a través del suelo. Las ondas de corte causan vibración de las partículas en el concreto y hacen que se muevan perpendiculares a la dirección de la frente de onda. La velocidad de propagación de ondas de corte ( $c_s$ ) está expresada por la siguiente ecuación:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.2)$$

Donde  $G$  es el módulo de corte dado por la siguiente ecuación:

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (2.3)$$



Los valores de velocidad de onda en muchos sólidos elásticos son generalmente un poco menores que la mitad de la velocidad de compresión. Para una relación de Poisson entre 0.2 y 0.3, el típico rango del concreto, la velocidad de onda de corte oscila entre 0.62 y 0.54 veces la velocidad de la onda de compresión viajando en un medio infinito. (FINNO, 1997 [10])

En la tabla 4 se presentan valores típicos de velocidades de propagación de onda de compresión y corte para diferentes tipos de material.

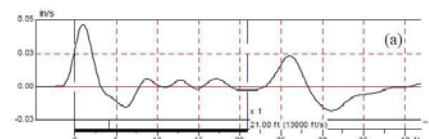
*Tabla 4 Velocidad de propagación de onda en diferentes materiales*

MATERIAL	DENSIDAD $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	VELOCIDAD DE ONDA	
		COMPRESIÓN Cp (m/s)	CORTE Cs (m/s)
Aire	1,2	340	-
Agua	1000	1480	-
Acero	7800	5900	3200
Concreto	2400	3500-4500	2500-3400
Arena	1500-2100	500-2000	100-850
Arcilla	1700-2000	400-1700	100-800
Caliza	2700	2000-5900	1000-3100
Granito	2750	2400-5000	1200-2500

*Fuente: [10] FINNO, 1997*

La velocidad de compresión en el concreto de buena calidad se toma frecuentemente en la práctica como de 4000m/s.

**2.1.2 Velocidad de propagación de onda en barras delgadas.** Cuando una onda se propaga a través de una barra delgada, como en el caso de los pilotes, la ecuación (2.1) de velocidad de onda de compresión se simplifica. En estructuras esbeltas como en los pilotes, la velocidad de onda de compresión es independiente de la relación de Poisson ya que el componente perpendicular de esfuerzo perpendicular al eje del pilote es despreciable tal y como lo dijera Timoshenko y Goodier en 1970 (FINNO, 1997 [10]).



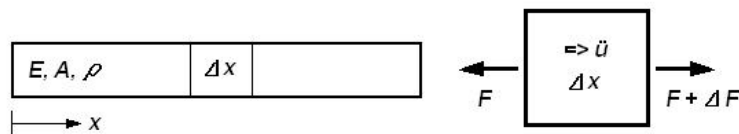
Por tanto para el caso de barras delgadas y paralelamente en pilotes, la velocidad de propagación de onda longitudinal, primaria o de compresión está dada por:

$$c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.4)$$

## 2.2 DEDUCCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para llevar a cabo la deducción general de la ecuación de movimiento en barras se realiza el siguiente análisis físico-matemático.

*Figura 26 Análisis de fuerzas de un elemento pequeño en una barra*

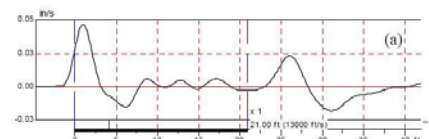


*Fuente: Adaptado de [6] DOYLE, 1989*

Si se define la elongación longitudinal de la barra con la variable  $u$  en el sentido del eje  $x$  para una barra con un material con módulo de elasticidad ( $E$ ), área de sección transversal ( $A$ ) y densidad por unidad de longitud ( $\rho$ ) ante la acción de fuerzas externas como las mostradas en la figura 26, se puede plantear la siguiente ecuación de movimiento siguiendo la segunda ley de Newton.

$$-F + [F + \Delta F] = \rho A \Delta x \ddot{u} \quad (2.5)$$

En donde se tiene que  $\rho A \Delta x = m = masa$  y la expresión  $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  representa la aceleración del sistema.



Si los elementos  $\Delta x$  son muy pequeños, entonces la ecuación (2.5) se puede escribir de forma diferencial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

Las variables independientes en este sistema son  $x$  y  $t$ . La ecuación (2.6) se puede escribir en términos únicamente del desplazamiento o elongación de la barra. Para lograrlo, se debe definir primero la relación esfuerzo-deformación. Esto es:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

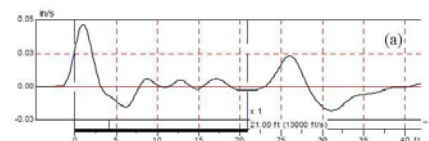
Se debe asumir que el comportamiento del material es lineal elástico en una dimensión, Adicionalmente, se conocen las siguientes relaciones:

$$\frac{F}{A} = \sigma = Ee \quad (2.8)$$

En donde  $\sigma$  es definido como el esfuerzo axial inducido en la barra. La combinación de las relaciones (2.7) y (2.8) en la ecuación (2.6) da como resultado

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

Al simplificar la ecuación anterior se obtiene la ecuación más sencilla de propagación unidimensional de ondas en barras, que considerando homogeneidad en las propiedades de los materiales que la componen, puede aplicarse igualmente en los pilotes para análisis dinámicos en una dimensión. Dicha ecuación general sería:





$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

El valor de  $c$  se ha definido en la ecuación (2.10) como la velocidad de propagación de onda en la barra como se definió anteriormente en la ecuación (2.4).

### 2.3 CLASIFICACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL

La expresión (2.10) clasifica como una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden. Para dos variables independientes, tales ecuaciones se pueden expresar de la forma general siguiente:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0 \quad (2.11)$$

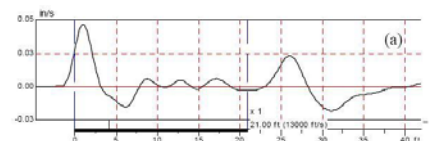
Las ecuaciones que clasifican como ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden tienen tres categorías de acuerdo a los valores que tengan los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente.

Las categorías están en función del valor que tome el determinante definido como  $B^2 - 4AC$ . La siguiente tabla muestra las posibles clasificaciones.

*Tabla 5 Categorías en las que se clasifican las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden con dos variables*

$B^2-4AC$	CATEGORÍA
<0	Elíptica
0	Parabólica
>0	Hiperbólica

Fuente: [3] CHAPRA, 2003



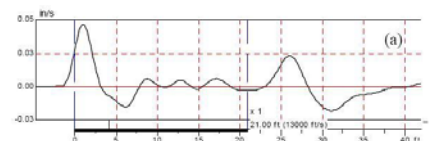
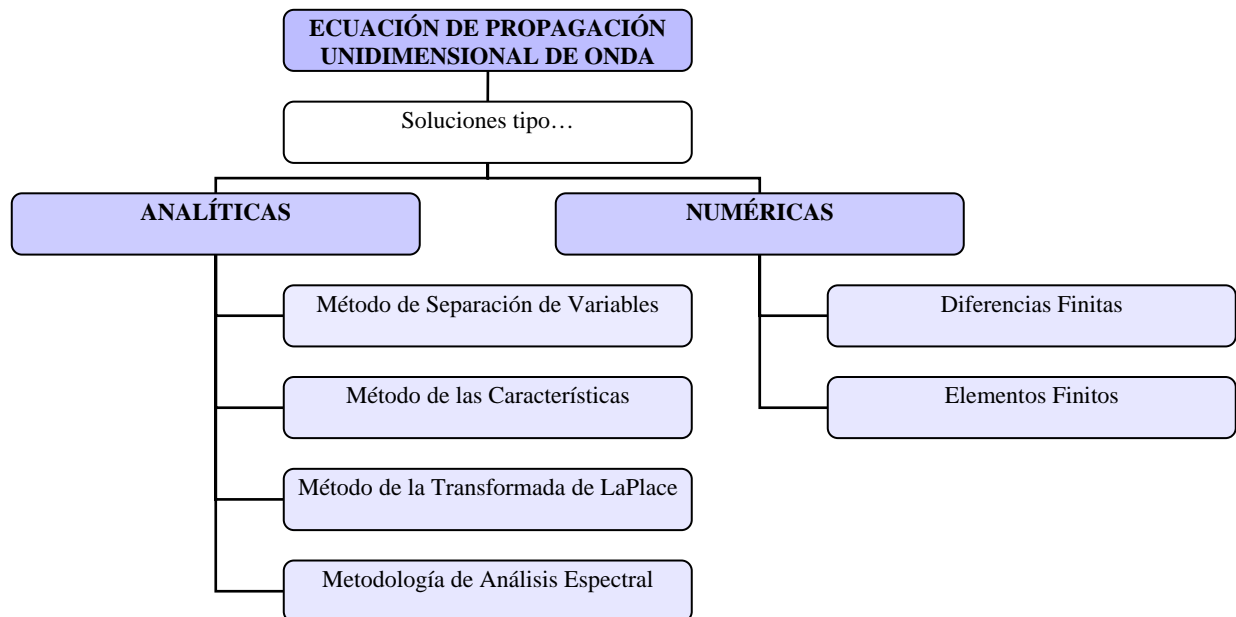
La ecuación (2.10) clasifica como una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden de tipo hiperbólica ya que el valor de  $B^2 - 4AC = (0)^2 - 4(1)(-c^2) > 0$

## 2.4 SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN UNIDIMENSIONAL DE ONDA

El problema de propagación unidimensional de ondas en pilotes ha sido abordado para su estudio debido a que considera el comportamiento de dichas estructuras y el suelo durante el proceso de hincado de pilotes y la acción de cargas dinámicas.

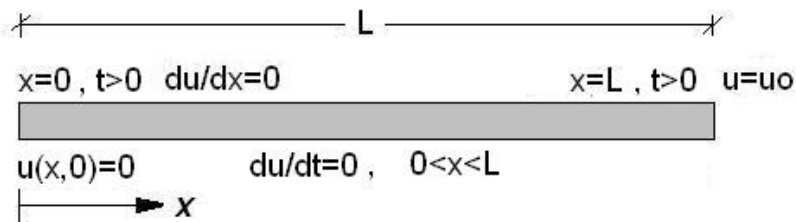
Existen diferentes tipos de análisis que son usados para su solución. El siguiente esquema presenta las posibles formas de abordar el problema.

*Figura 27 Tipos de análisis de la ecuación unidimensional de onda para obtener su solución*



**2.4.1 Ejemplo de solución por el método de separación de variables.** Para ciertos problemas, especialmente aquellos de vibraciones continuas, la ecuación diferencial (2.10) puede ser resuelta convenientemente por el método de separación de variables. A continuación se dará la solución al problema de propagación unidimensional de ondas con las condiciones iniciales y de frontera dadas en la figura 28, siguiendo los pasos de VERRUIJT, 2005 de la referencia [26]

**Figura 28** Condiciones iniciales y de frontera para la solución de la ecuación (2.10) por el método de separación de variables.



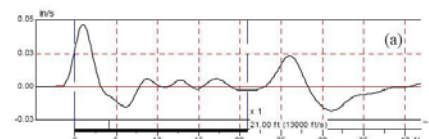
Para la solución de la ecuación (2.10) se busca una solución de la forma

$$u(x,t) = u_0 + X(x)T(t) \quad (2.12)$$

Se asume con la anterior ecuación que las soluciones pueden ser escritas como el producto de dos funciones, una función  $X(x)$ , que depende de  $x$  solamente, y otra función  $T(t)$  que depende solamente de  $t$ . Sustituyendo la ecuación (2.12) en la ecuación diferencial parcial (2.10) se obtiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (2.13)$$

Como el lado derecho es una función que depende solamente de  $x$ , y el lado izquierdo depende de  $t$  solamente, cada lado debe ser igual a una constante. Si dicha constante se asume que es negativa, se obtendría



$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 \quad (2.14)$$

Donde  $\lambda$  es la constante desconocida. La solución general para (2.14) es

$$X = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \quad (2.15)$$

Donde  $A$  y  $B$  son constantes que pueden ser determinadas por las condiciones iniciales. Dado que  $dX/dx$  debe ser 0 para  $x=0$  se tiene que  $B=0$ . Ahora como se requiere que  $X=0$  para  $x=L$ , en orden para satisfacer las condiciones de frontera dadas en la figura 28 se encuentra que igualmente  $A=0$ , que lleva a la solución  $u(x,t)=0$ , o  $\cos(\lambda L)=0$ , que se cumple sólo si

$$\lambda = \lambda_k = (2k+1) \frac{\pi}{2L} \quad (2.16)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

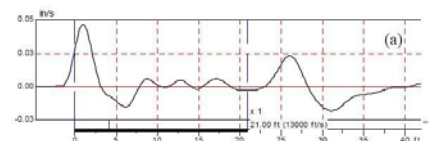
Por otro lado, para la función dependiente de  $T$  se tiene que

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -c^2 \lambda^2 \quad (2.17)$$

con solución general

$$T = A \cos(\lambda ct) + B \sin(\lambda ct) \quad (2.18)$$

La solución general para el desplazamiento  $u(x,t)$  puede ser escrita de la forma general según el método de separación de variables (2.12) y teniendo en cuenta las soluciones (2.15) y (2.18) de la siguiente manera:



$$u(x, t) = u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [A_k \cos(\lambda_k ct) + B_k \sin(\lambda_k ct)] \cos(\lambda_k x) \quad (2.19)$$

Para dicha ecuación se debe resolver los coeficientes  $A_k$  y  $B_k$  que dependen de las condiciones iniciales dadas en la figura 28.

Con la solución (2.19) se puede derivar respecto al tiempo y obtener que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} [-A_k \lambda_k c \sin(\lambda_k ct) + B_k \lambda_k c \cos(\lambda_k ct)] \cos(\lambda_k x) \quad (2.20)$$

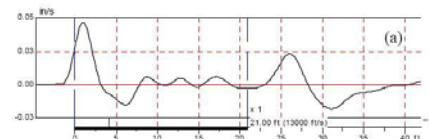
Dado que la anterior expresión debe ser cero para todos los valores de  $x$  (condición inicial) se tiene que  $B_k = 0$ . Por otra parte, la condición inicial que establece el desplazamiento  $u(x, 0) = 0$ , simplifica la ecuación (2.19) que quedaría de la siguiente manera:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\lambda_k x) = -u_0 \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) se debe satisfacer para todos los valores de  $x$  en el rango  $0 < x < L$ . Lo anterior es un problema estándar de análisis de series de Fourier y se resuelve multiplicando a ambos lados de la ecuación por  $\cos(\lambda_k x)$ , y luego integrando ambos lados respecto a  $x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = L$ , el resultado es

$$A_k = \frac{4}{\pi} \frac{u_0}{(2k+1)} (-1)^k \quad (2.22)$$

Sustituyendo el anterior resultado en la solución general de la ecuación (2.19) con  $B_k = 0$  se obtiene finalmente como resultado



$$u(x, t) = u_0 + u_0 \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos \left[ (2k+1) \frac{\pi x}{2L} \right] \cos \left[ (2k+1) \frac{\pi ct}{2L} \right] \quad (2.23)$$

La solución (2.23) puede ser vista como una suma de soluciones periódicas, cada una combinada con una forma de la función particular. Usualmente una función periódica se escribe como  $\cos(\omega t)$ . Para la ecuación (2.23) las posibles frecuencias  $\omega$  serían

$$\omega = \omega_k = (2k+1) \frac{\pi}{2L} \quad (2.24)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

denominadas como las frecuencias características.

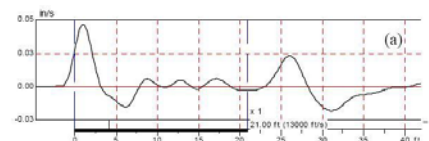
**2.4.2 Ejemplo de solución por el método de Transformada de Laplace.** El método de transformada de Laplace puede ser usado para el análisis de ondas en pilotes de longitud finita. Se resolverá el mismo ejemplo analizado por el método de separación de variables y teniendo en cuenta las consideraciones del mismo autor (VERRUIJT, 2005 [26])

Considerando el pilote con las condiciones establecidas en la figura 28 en donde la frontera  $x=0$  está libre de esfuerzo, y la frontera  $x=L$  tiene un desplazamiento leve en el tiempo  $t=0$ . Por tanto las condiciones de frontera son:

$$x=0, t>0: \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

$$x=L, t>0: u = u_0$$

La solución general de la ecuación diferencial (2.10) transformada



$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = \frac{s^2}{c^2} \bar{u} \quad (2.26)$$

es

$$\bar{u} = A e^{\frac{sx}{c}} + B e^{-\frac{sx}{c}} \quad (2.27)$$

Las constantes  $A$  y  $B$ , que dependen del parámetro de transformación de Laplace  $s$ , pueden ser determinados de las transformaciones de las condiciones de frontera dadas en (2.25). El resultado es

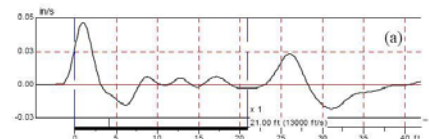
$$\bar{u} = \frac{u_0}{s} \frac{\cosh\left(\frac{sx}{c}\right)}{\cosh\left(\frac{sL}{c}\right)} \quad (2.28)$$

La solución completa a la ecuación diferencial (2.10) se encuentra al resolver la inversa de la expresión (2.28). Esto puede llevarse a cabo usando la integral compleja de inversión, en su forma más simple (VERRUIJT, 2005 [26]). Lo anterior, con unas operaciones matemáticas lleva al mismo resultado obtenido mediante el método de separación de variables, según el mismo autor.

$$u(x,t) = u_0 + u_0 \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos\left[(2k+1) \frac{\pi x}{2L}\right] \cos\left[(2k+1) \frac{\pi ct}{2L}\right] \quad (2.29)$$

La solución de la ecuación de propagación de onda en una dimensión mediante las expresiones (2.23) y (2.29) se encuentran en forma de series de Fourier.

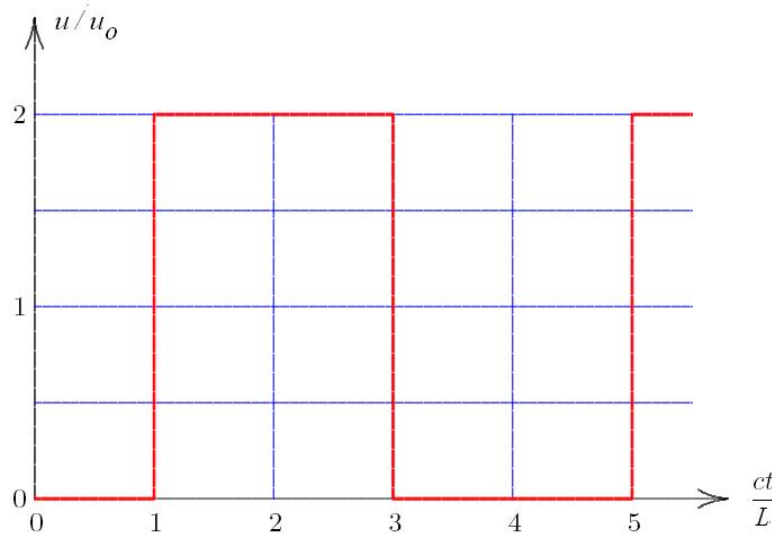
El resultado de la suma de las series se muestra en la siguiente figura. Se muestra que la punta permanece en reposo por un tiempo  $L/c$ , y luego se muestra un desplazamiento de





$2u_0$  por un tiempo de  $2L/c$ , y luego cambia continuamente entre un desplazamiento nulo y de  $2u_0$ .

**Figura 29** Desplazamiento de la punta libre. Sumatoria de series de Fourier. Ecuación (2.29)



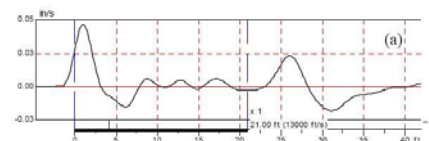
Fuente: Adaptado de [26] VERRUIJT, 2005

**2.4.3 Solución por el Método de las Características.** La solución por el método de las características es una herramienta poderosa para analizar la propagación unidimensional de ondas en pilotes.

El método es válido para un pilote libre sin interacción por fricción del fuste del pilote y resistencia en la punta. Se basa en el fenómeno físico ideal en el que las ondas de esfuerzos se propagan sin alteraciones a una velocidad de onda característica. (MIDDENDORP, 2004 [18])

La ecuación (2.10) definida como la expresión más sencilla que representa la propagación de ondas en una dimensión en pilotes tiene solución de la forma

$$u(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \quad (2.30)$$



Donde  $f_1$  y  $f_2$  son funciones arbitrarias y  $c$  es la velocidad de propagación de onda en pilotes definida por la expresión (2.4). En matemáticas las direcciones  $x = ct$  y  $x = -ct$  son llamadas las características. La solución de un problema particular se puede obtener de la solución general dada en (2.30) haciendo uso de las condiciones iniciales y de frontera.

Una forma de construir las soluciones a la ecuación de onda se deduce en la referencia [26] en donde la ecuación (2.10) se reescribe de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.32)$$

Donde  $v$  es la velocidad definida como  $v = \partial u / \partial t$ , y  $\sigma$  es el esfuerzo en el pilote.

Para lograr una simplificación de las ecuaciones anteriores, se definen dos nuevas variables como

$$\xi = x - ct \quad (2.33)$$

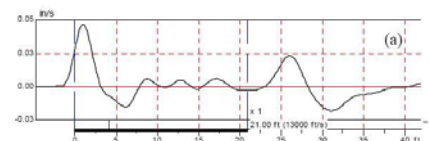
$$\eta = x + ct$$

Las ecuaciones (2.31) y (2.32) pueden ser transformadas a las siguientes expresiones

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = \rho c \left( -\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = \rho c \left( -\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \quad (2.35)$$

de las cuales al ser operadas mediante suma o resta de las dos ecuaciones, se obtiene la siguiente expresión



$$\frac{\partial(\sigma - Zv)}{\partial\eta} = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial(\sigma + Zv)}{\partial\xi} = 0 \quad (2.37)$$

donde  $Z$  es la impedancia definida como

$$Z = A\rho c = A\sqrt{E\rho} = \frac{EA}{c} \quad (2.38)$$

Las ecuaciones (2.36) y (2.37) definidas en términos de las variables originales serían

$$\frac{\partial(\sigma - Zv)}{\partial(x + ct)} = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial(\sigma + Zv)}{\partial(x - ct)} = 0 \quad (2.40)$$

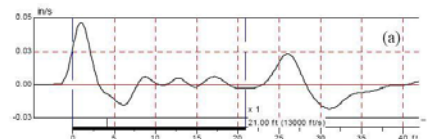
Estas ecuaciones significan que la cantidad  $\sigma - Zv$  es independiente de  $x + ct$  y que la cantidad  $\sigma + Zv$  es igualmente independiente de  $x - ct$  lo cual se puede expresar como

$$\sigma - Zv = f_1(x - ct) \quad (2.41)$$

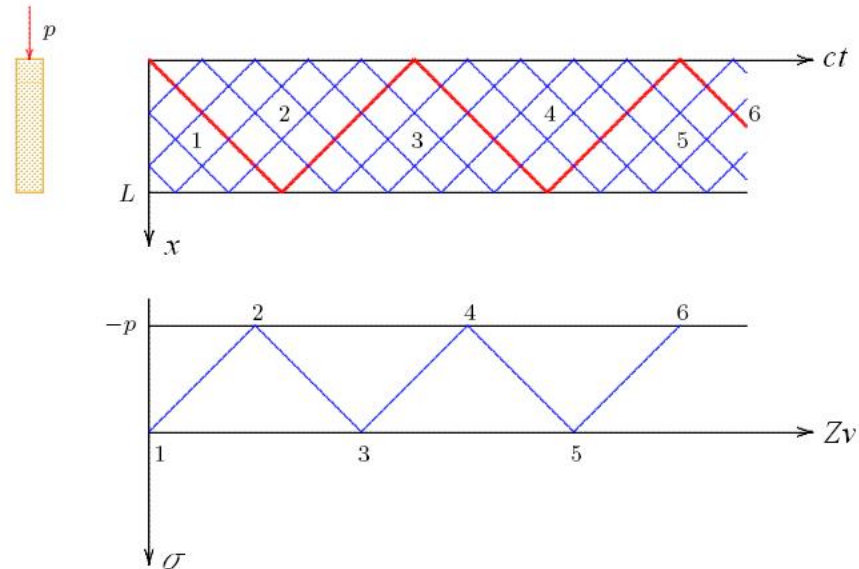
$$\sigma + Zv = f_2(x + ct) \quad (2.42)$$

Las anteriores expresiones indican que la cantidad  $\sigma - Zv$  es una función de  $x - ct$  únicamente y que la expresión  $\sigma + Zv$  es una función de  $x + ct$  únicamente, lo cual hace que  $\sigma - Zv$  sea constante cuando  $x - ct$  es constante, y de igual manera hace que  $\sigma + Zv$  sea constante cuando  $x + ct$  es constante.

Dichas propiedades permiten construir soluciones de manera analítica o de manera gráfica por medio de la representación de las variables  $\sigma$  y  $Zv$  en el plano de las variables independientes  $x$  y  $ct$  como se presenta esquemáticamente en la figura No.30



*Figura 30 Soluciones gráficas por el método de las características*



*Fuente: Adaptado de [26] VERRUIJT, 2005*

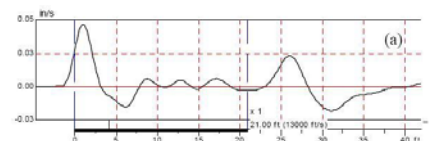
Verruijt, en la referencia [26] explica la anterior gráfica mediante un sencillo ejemplo.

Se considera un pilote libre que es golpeado en su parte superior en  $x = 0$  en el tiempo  $t = 0$  de tal manera que el esfuerzo generado en esa punta sea  $-p$ . El otro extremo en  $x = L$  está libre y por tanto en ese momento el esfuerzo es cero. El estado inicial considera que todas las velocidades son cero.

En la figura superior de la figura 30 se ha dibujado el diagrama de  $x$  y  $ct$ , con líneas de constante  $x - ct$  y  $x + ct$ .

Dado que inicialmente la velocidad  $v$  y el esfuerzo  $\sigma$  son cero a lo largo del pilote, la condición en cada punto del pilote está representada por el punto 1 del diagrama inferior de  $\sigma$  y  $Zv$  en la figura 30. Los puntos del diagrama superior de la figura marcados con el número 1 pueden ser alcanzados por puntos del eje  $ct = 0$  (del cual  $\sigma = 0$  y  $Zv = 0$ ) por una característica descendente  $x - ct = \text{constante}$ . Por tanto en todos estos puntos  $\sigma - Zv = 0$ .

En el fondo del pilote el esfuerzo es siempre cero,  $\sigma = 0$ . Por tanto en los puntos de la región 1 para los cuales  $x = 0$  la velocidad es también cero.

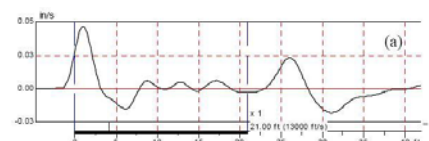


En realidad, la región completa marcada con el número 1 se cumple que:  $\sigma = Zv = 0$ , porque todos estos puntos pueden ser alcanzados por una característica ascendente y una característica descendente desde los puntos en que se cumple que  $\sigma = Zv = 0$ . El punto 1 en el diagrama inferior de la figura es representativo de todos los puntos de la región 1 del diagrama superior de la misma figura.

Para  $t > 0$  el valor del esfuerzo  $\sigma$  en la frontera superior  $x = 0$  es  $-p$ , para todos los valores de  $t$ . La velocidad no es conocida. El eje  $x = 0$  en el diagrama superior de la figura 30 puede ser alcanzado desde puntos de la región 1 a través de líneas para las cuales  $x + ct = \text{constante}$ . Por consiguiente, el punto correspondiente en el diagrama inferior  $\sigma$  y  $Zv$  debe ser ubicado en la línea para la cual  $\sigma + Zv = \text{constante}$ , empezando del punto 1. Dado que el esfuerzo  $\sigma$  en la cabeza del pilote debe ser  $-p$ , el punto en el diagrama inferior debe ser el 2. Esto significa que la velocidad es  $Zv = p$  o lo que es igual que  $v = p/Z$ . Esta es la velocidad de la punta del pilote por un espacio de tiempo, por lo menos hasta  $ct = 2L$ , si  $L$  es la longitud del pilote ya que todos los puntos para los cuales  $x = 0$  y  $ct < 2L$  pueden ser alcanzados desde la región 1 a través de las características  $x + ct = \text{constante}$ .

En la parte baja del pilote, el esfuerzo  $\sigma$  debe ser siempre cero, porque el pilote se asume que no está soportado en su base. Los puntos del diagrama superior de la figura 30 ubicados en la línea  $x = L$  pueden ser alcanzados desde la región 2 a través de líneas de constante  $x - ct$ . Por tanto deben ser ubicadas en una línea de constante  $\sigma - Zv$  en el diagrama inferior comenzando desde el punto 2. Lo anterior lleva al punto 3, lo cual significa que la velocidad en la punta inferior del pilote es ahora  $v = 2p/Z$ . Esta velocidad aplica para todos los puntos de la región 3 del diagrama superior.

De la forma descrita anteriormente se puede analizar en pasos sucesivos la velocidad y el esfuerzo en el pilote.

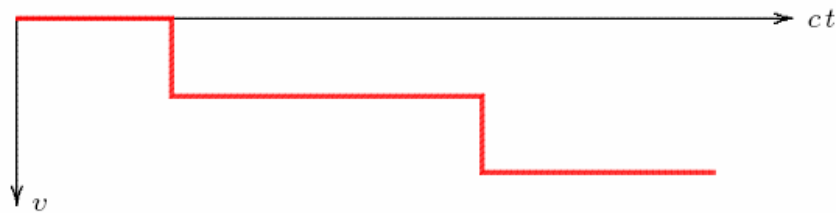


Las líneas gruesas en el diagrama superior de la figura 30 son las fronteras de las diferentes regiones.

Si la fuerza en la cabeza del pilote continúa siendo aplicada, como se asume en la figura 31, la velocidad del pilote se incrementa continuamente. La figura 31 muestra la velocidad del fondo del pilote como función del tiempo. La velocidad gradualmente se incrementa con el tiempo, ya que la presión  $p$  de la cabeza del pilote continúa actuando.

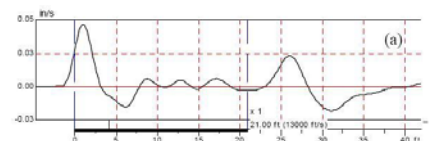
Lo anterior está de acuerdo con la segunda ley de Newton, que establece que la velocidad se incrementa continuamente bajo la influencia de una fuerza constante.

*Figura 31 Velocidad en la base del pilote mediante el análisis del método de las características*



*Fuente: [26] VERRUIJT, 2005*

**2.4.4 Introducción a la solución por el Método de Análisis Espectral.** La llave de la descripción espectral de ondas es la facilidad de expresar los cambios de fase en los que incurre la onda de esfuerzos a media que se propaga de un lugar a otro (DOYLE, 1989 [6]). Esto se logra usando la ecuación diferencial que gobierna el modelo y la idea es representar la variación del tiempo de una función por la sumatoria de funciones armónicas. El método logra remover la variación del tiempo usando la representación espectral de la solución. Ello hace que se tenga una nueva ecuación diferencial para los coeficientes haciendo que la ecuación pueda ser integrada directamente la mayoría de veces.



Las soluciones en los problemas de onda son funciones generales en el espacio y tiempo. Si la variación del tiempo de la solución se enfoca en un punto particular del espacio, entonces se tiene la siguiente representación espectral:

$$u(x, t) = f_1(t) = \sum C_{1n} e^{i\omega_n t} \quad (2.43)$$

En otro punto cualquiera, se comporta como una función del tiempo  $f_2(t)$  y es representada por los coeficientes de Fourier  $C_{2n}$ , lo cual significa que los coeficientes son diferentes en cada punto en el espacio. Por tanto, la solución en una posición arbitraria tiene la siguiente representación espectral

$$u(x, t) = \sum \hat{u}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2.44)$$

Donde  $\hat{u}_n$  representa los coeficientes de Fourier dependientes del tiempo y son función de la frecuencia  $\omega_n$ . La función tendrá la representación dada por

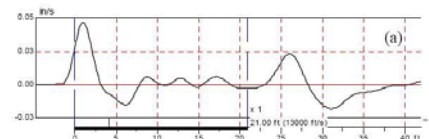
$$u(x, t) \Rightarrow \hat{u}_n(x, \omega_n) \quad (2.45)$$

Haciendo uso del análisis espectral para abordar la ecuación diferencial básica dada en (2.10) se tiene para los coeficientes de Fourier que

$$EA \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \omega^2 \rho A \hat{u} = 0 \quad (2.46)$$

Dado que la ecuación (2.46) tienen coeficientes constantes, entonces tiene la solución estaría dada por

$$\hat{u}(x) = A e^{-ikx} + B e^{+ikx} \quad (2.47)$$



donde,

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (2.48)$$

Y **A** y **B** son las amplitudes indeterminadas para cada frecuencia.

Cuando se combina con la variación del tiempo, la solución corresponde a dos ondas: una que viaja al frente y otra que viaja hacia atrás. Esto es,

$$u(x,t) = \sum A e^{-i(kx-\omega t)} + \sum B e^{+i(kx+\omega t)} \quad (2.49)$$

Los valores de **A**, **B**,  $k$ , etc dependen de la frecuencia  $\omega_n$ .

El análisis espectral de la ecuación de onda se detallará en el siguiente capítulo con mayor detalle, ya que es la solución analítica que se implementará para hallar la solución a la ecuación de onda con el alcance que se pretende en este trabajo de grado.

**2.4.5 Solución Numérica.** Arnold Verruijt, en su libro Soil Dynamics de la referencia [26] realiza toda la explicación teórica y práctica mediante programas sencillos para analizar el fenómeno de propagación de ondas en pilotes de forma numérica.

Para poder construir un modelo numérico para la solución de la ecuación de onda se escriben las ecuaciones básicas de forma numérica.

Para lograr este objetivo el pilote se subdivide en  $n$  elementos todos de la misma longitud  $\Delta x$ . El desplazamiento  $u_i$  y la velocidad  $v_i$  de un elemento se definen en el centroide del elemento  $i$ , y las fuerzas normales  $N_i$  se definen en las fronteras entre los elementos  $i$  e  $i+1$  como se puede observar en la figura 32.

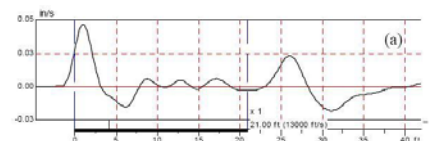
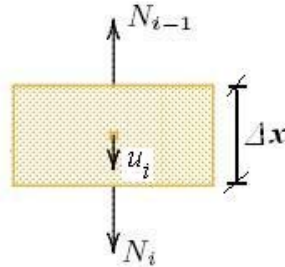




Figura 32 Elemento  $n$  del pilote cargado axialmente. Solución numérica



Fuente: Adaptado de [26] VERRUIJT, 2005

La ecuación de movimiento del elemento de la figura 32 sería

$$N_i - N_{i-1} = \rho A \Delta x \frac{v_i(t + \Delta t) - v_i(t)}{\Delta t}, (i = 1, \dots, n) \quad (2.50)$$

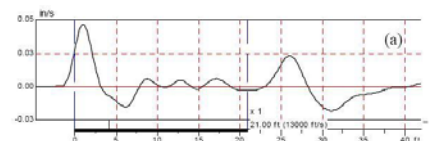
Como se puede observar, existen  $n + 1$  fuerzas normales, desde  $N_0$  hasta  $N_n$ . La fuerza  $N_0$  puede ser considerada como la fuerza en la cabeza del pilote, y  $N_n$  es la fuerza en la base o punta del pilote.

El desplazamiento  $u_i$  está relacionado con la velocidad  $v_i$  por medio de la ecuación

$$v_i = \frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t)}{\Delta t}, (i = 1, \dots, n) \quad (2.51)$$

y la deformación se relaciona con la fuerza normal por medio de la ley de Hooke por medio de la expresión

$$N_i = EA \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}, (i = 1, \dots, n - 1) \quad (2.52)$$



Los valores de la fuerza normal en la cabeza y punta del pilote,  $N_0$  y  $N_n$ , se supone están dados por las condiciones de frontera.

Las anteriores ecuaciones pueden ser entendidas mejor con el siguiente ejemplo general.

Se supone que el pilote se encuentra inicialmente en reposo, y se aplica una fuerza constante  $P$  en la cabeza del elemento con su punta libre. En dicho caso las condiciones de frontera serían

$$N_0 = -P \quad (2.53)$$

$$N_n = 0$$

En el tiempo  $t = 0$  todos los valores son cero excepto  $N_0$ . Se puede por tanto calcular un set de velocidades de la ecuación (2.50). En realidad, esto hará una velocidad que tome un valor diferente de cero, que se denominará  $v_1$ , que sería entonces,

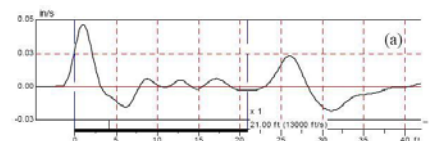
$$v_1 = \frac{P\Delta t}{\rho A \Delta x} \quad (2.54)$$

Luego, un nuevo grupo de valores de desplazamiento se puede calcular de la ecuación (2.51). De nuevo, en el primer paso, un solo valor será diferente de cero como se muestra a continuación:

$$u_1 = v_1 \Delta t = \frac{P(\Delta t)^2}{\rho A \Delta x} \quad (2.55)$$

Finalmente, un nuevo set de valores de la fuerza normal puede ser calculado de la ecuación (2.52). Esto dará como resultado el valor de  $N_1$  obtenido mediante la expresión:

$$N_1 = -EA \frac{u_1}{\Delta x} = -P \frac{c^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \quad (2.56)$$



El anterior proceso se repite, usando las ecuaciones en el mismo orden.

En el proceso de la solución numérica de la ecuación de onda, es importante definir el valor del incremento de tiempo a usar. Dado que las ondas de esfuerzos viajan en los pilotes a una velocidad dada por la ecuación (2.2), se combina con la relación de incremento espacial y de tiempo por medio de la expresión

$$\Delta x = c\Delta t \quad (2.57)$$

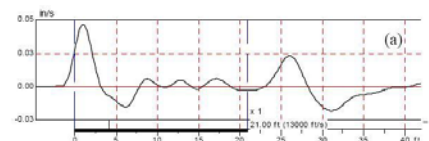
Para definir el valor del incremento de tiempo a usar en función del tamaño de los elementos a analizar

## 2.5 INFLUENCIAS EXTERNAS

La anterior deducción para la ecuación de propagación longitudinal de ondas en barras considera que no existen influencias externas sobre el elemento en movimiento, lo cual hace que no represente la realidad en su totalidad. Es por esto que para una mayor representación del fenómeno físico y su adaptación al comportamiento real de propagación de ondas en pilotes, se debe incorporar a la ecuación (2.10) parámetros del medio circundante.

En mecánica de suelos, los pilotes experimentan efectos de fricción a lo largo de su fuste debido al suelo que los rodea. Para incorporar dichos efectos dentro de la ecuación que describe el comportamiento de ondas en pilotes se pueden realizar ciertas consideraciones.

**2.5.1 Pilote con fuerzas cortantes a lo largo de su fuste.** De manera sencilla, se puede considerar un pilote con sección transversal constante  $A$ , módulo de elasticidad  $E$ , que se



apoya en una base rígida y su fuste se encuentra influenciado por fuerzas de corte generadas ante un eventual movimiento del elemento (Ver figura 33).

La ecuación diferencial estaría dada por

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - C\tau = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.58)$$

donde  $C$  es la circunferencia del fuste del pilote y  $\tau$  es el esfuerzo cortante. Se asume como primera aproximación que el esfuerzo cortante es proporcional al movimiento vertical del pilote

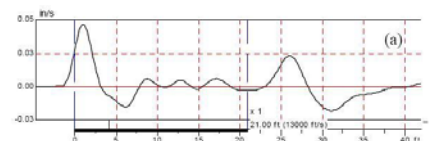
$$\tau = ku \quad (2.59)$$

donde  $k$  tiene la función de ser de módulo del suelo. La ecuación (2.58) se puede reescribir entonces de la siguiente manera

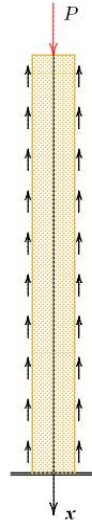
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{u}{H^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.60)$$

donde  $H$  es un parámetro que caracteriza la razón de la rigidez axial del pilote con la constante de fricción  $k$  de la siguiente manera

$$H^2 = \frac{EA}{kC} \quad (2.61)$$



*Figura 33 Pilote en el suelo con acción de fuerzas de fricción*



*Fuente: Adaptado de [26] VERRUIJT, 2005*

El valor de  $k$  puede ser estimado mediante la relación de la rigidez del suelo en la fórmula  $k = E_s D$ , donde  $E_s$  es el módulo de elasticidad del suelo (asumiendo deformaciones muy pequeñas), y  $D$  es el diámetro del pilote. Para un pilote circular de diámetro  $D$ , el valor del parámetro  $H$  es ahora

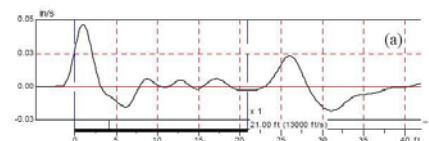
$$H^2 = \frac{EA}{kC} = \frac{E_c D^2}{2E_s} \quad (2.62)$$

Las condiciones de frontera se establecen como

$$x = 0 : EA \frac{\partial u}{\partial x} = -P \sin(\omega t) \quad (2.63)$$

$$x = L : u = 0$$

La primera condición indica que el pilote es cargado por una fuerza periódica, de amplitud  $P$  a una frecuencia  $\omega$ . La segunda condición de frontera expresa que en la base o punta



del pilote no puede haber desplazamiento, indicando que el pilote se encuentra sobre una roca por ejemplo.

El problema establecido mediante la ecuación (2.60) y las condiciones de frontera dadas en (2.63) puede ser resuelto por el método de separación de variables como lo explica Verruijt en su libro Soil Dynamics. Verruijt, asume que la solución puede ser expresada como el producto de una función de  $x$  y un factor  $\sin(\omega t)$ .

Se obtiene que la solución que incluye las condiciones de frontera según Verruijt, 2005, es

$$u(x,t) = \frac{PH}{EA\alpha} \frac{\sinh[\alpha(L-x)/H]}{\cosh(\alpha L/H)} \sin(\omega t) \quad (2.64)$$

Donde  $\alpha$  está dado por

$$\alpha = \sqrt{1 - \omega^2 H^2 / c^2} \quad (2.65)$$

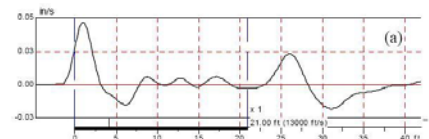
Al evaluar el desplazamiento en  $u(0,t)$  o lo que es igual en la cabeza del pilote, la expresión (2.64) se simplifica y puede ser escrita como

$$u(0,t) = \frac{P}{K} \sin(\omega t) \quad (2.66)$$

Donde  $K$  puede representar la constante del resorte y tener como valor

$$K = \frac{EA}{L} \frac{\alpha L/H}{\tanh(\alpha L/H)} \quad (2.67)$$

La solución anterior es llevada a cabo haciendo uso de uno de los métodos analíticos para solucionar la ecuación de onda. En el caso en que a la ecuación (2.10) se le incorporen más expresiones para representar el comportamiento real, la solución mediante métodos analíticos se va limitando y su complejidad matemática aumenta considerablemente.



**2.5.2 Pilote con fuerzas externas elásticas y de amortiguamiento.** En su tesis de maestría de la referencia [27], Warrington presenta una solución analítica completa para la ecuación diferencial parcial que se muestra a continuación

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial u}{\partial t} + au \quad (2.68)$$

donde  $a$  es la constante de elasticidad da la interacción pilote-suelo y  $b$  es la constante de amortiguamiento de la misma interacción. La ecuación (2.68) es también llamada la ecuación del Telégrafo o de línea de transmisión.

La solución analítica presentada por Warrington para la ecuación anterior incorpora condiciones iniciales y de frontera que definen la prueba de carga dinámica (PDA) con las consideraciones dadas en la figura 34

Warrington incorpora algunas definiciones para redefinir el planteamiento de la ecuación (2.68). Para ello establece la relación de geometría del pilote como

$$r_g = \frac{A}{P^2} \quad (2.69)$$

donde  $r_g$  es la relación de geometría del pilote,  $A$  es la sección transversal del pilote y  $P$  es la superficie perimetral del elemento.

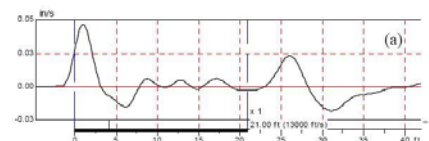
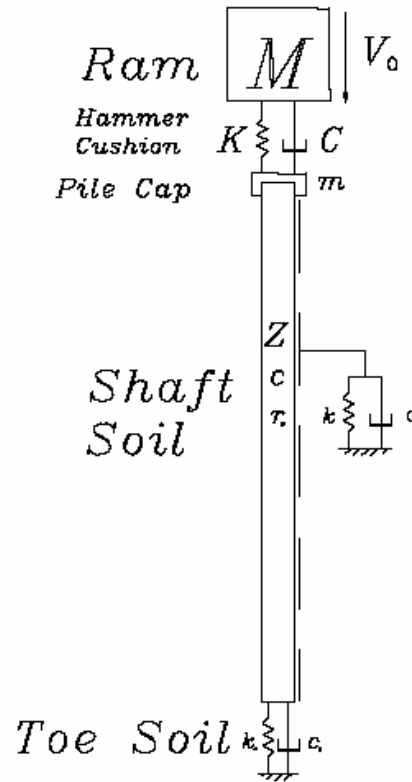


Figura 34 Modelo para la prueba de carga dinámica solucionado por WARRINGTON, 1997



Fuente: Adaptado de [28] WARRINGTON, 1997

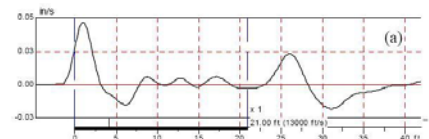
Adicionalmente menciona que para definir la elasticidad del suelo  $a$ , y la amortiguación  $b$  a lo largo del pilote, hace uso del modelo de Randolph y Simons del año 1986 y del modelo de Corté y Lepert del año de 1986 para establecer las siguientes expresiones

$$k = \pi G_s \sqrt{\frac{r_g}{A}} \quad (2.70)$$

y

$$\mu = \sqrt{G_s \rho_s} \quad (2.71)$$

Donde,  $G_s$  es el módulo de corte elástico del suelo,  $\rho_s$  es la densidad del suelo,  $k$  es la constante elástica por unidad de área de la interacción entre el suelo y el pilote y  $\mu$  es el





coeficiente de amortiguamiento por unidad de área de la interacción entre el suelo y el pilote.

Con dichas definiciones, la ecuación (2.68) quedaría expresada como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho \sqrt{Ar_g}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k}{\rho \sqrt{Ar_g}} u \quad (2.72)$$

La solución de la anterior ecuación se lleva a cabo haciendo uso de transformadas de Laplace y se describe con detalle en las referencias [27] y [28] del autor anteriormente mencionado. La solución a la ecuación (2.72) con las condiciones iniciales y de frontera establecidas en tales referencias está dada por la expresión:

$$u(x,t) = \hat{f}(t) \hat{g}(t) = \frac{1}{Z} \int_{x/c}^t e^{b\tau} I_0 \left( \sqrt{(b^2 - a) \left( \tau^2 - \left( \frac{x}{c} \right)^2 \right)} \right) F_0(t - \tau) d\tau, t > \frac{x}{c} \quad (2.73)$$

Donde  $\hat{f}(t)$  es la transformada inversa de Laplace para la función de fuerza en la cabeza del pilote y  $\hat{g}(t)$  es la transformada inversa de Laplace para la función de respuesta del pilote.

**2.5.3 Influencias externas analizadas mediante la relación espectral  $k$ .** Otro tipo de análisis analítico, para considerar dentro de la solución de la ecuación diferencial parcial que gobierna el fenómeno, los efectos elásticos y de amortiguación, es mediante la relación espectral  $k$  descrita a través de la metodología de análisis espectral introducida en el numeral 2.4.4. En la figura 35 se observan gráficamente las influencias externas

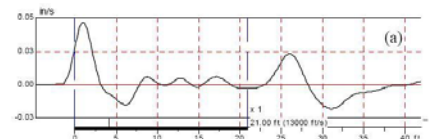
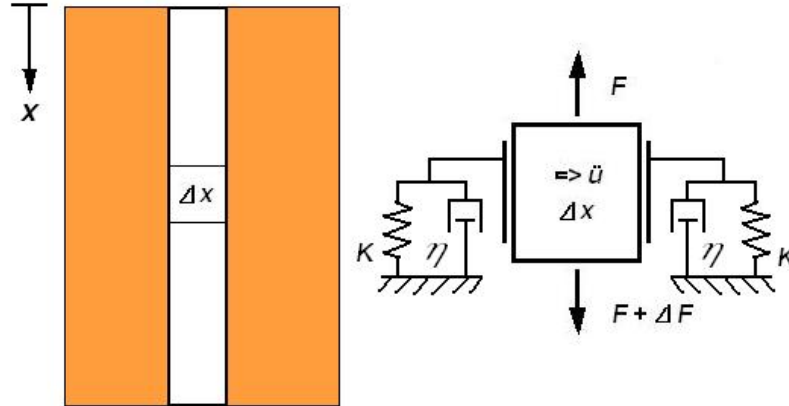


Figura 35 Influencias externas sobre el pilote que redefinen la ecuación de onda



Es fácil imaginar que a medida que la onda viaja a lo largo del pilote, la respuesta está influenciada por el medio circundante. En el sistema anterior, se definen las fuerzas retardantes proporcionales a la velocidad como  $(-\eta\dot{u})$  y desplazamiento  $(-Ku)$ .

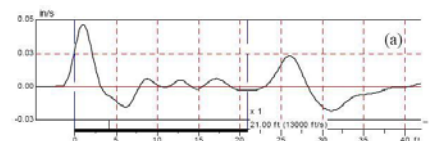
Por tanto se tendría la ecuación (2.10) complementada por dichas fuerzas, de tal manera que la expresión más general para la representación del fenómeno sería la siguiente

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Ku - \eta \frac{\partial u}{\partial t} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.74)$$

Dicha ecuación tendría la siguiente representación espectral para la cual se hará una mayor descripción posteriormente en los capítulos 3 y 4 del presente documento.

$$EA \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + [\omega^2 \rho A - K - i\omega\eta] \hat{u} = 0 \quad (2.75)$$

que tendría la misma solución que la ecuación (2.47) excepto que la relación espectral es compleja y estaría dada por



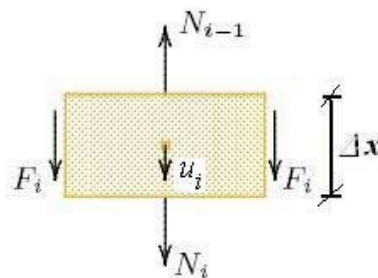
$$k = \pm \left[ \omega^2 \frac{\rho}{E} - \frac{K}{EA} - i\omega \frac{\eta}{EA} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.76)$$

Las soluciones analíticas para la ecuación de propagación unidimensional de onda que incorporan la existencia de fricción entre el suelo y el pilote y efectos de amortiguamiento, solo pueden ser resueltas analíticamente si dentro de la ecuación diferencial parcial dichos parámetros son incorporados como funciones analíticas como en los ejemplos mostrados anteriormente.

#### 2.4.4 Planteamiento de una solución numérica que incorpora fuerzas de fricción.

Para un análisis numérico de los efectos por fricción se utilizan las mismas expresiones descritas en el numeral 2.4.5 pero dentro de la ecuación (2.50) se tendría la siguiente modificación teniendo en cuenta la fuerza de fricción mostrada en la figura 36.

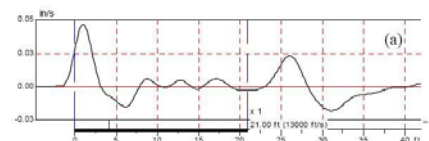
*Figura 36 Elemento  $n$  del pilote cargado axialmente. Solución numérica con fuerzas de fricción.*



*Fuente: Adaptado de [26] VERRUIJT, 2005*

$$N_i - N_{i-1} + F_i = \rho A \Delta x \frac{v_i(t + \Delta t) - v_i(t)}{\Delta t}, (i = 1, \dots, n) \quad (2.77)$$

El proceso de análisis igualmente debe seguir el orden de las ecuaciones descritas en el numeral 2.4.5



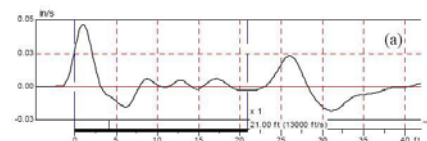
## 2.6 REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDA

Un aspecto interesante en el estudio de la propagación de ondas en medios continuos es el poder analizar el comportamiento de dichas ondas en cualquier discontinuidad, cambio de sección o cambio de las propiedades mecánicas de los materiales ya que dichos efectos generan nuevas ondas.

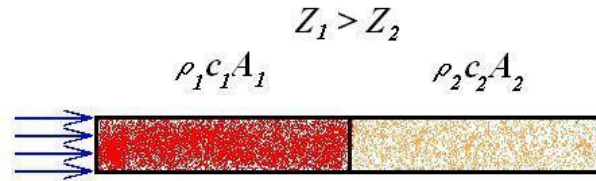
Cuando una onda mecánica se genera en la superficie por medio del martillo de mano, una zona de compresión se forma generando como resultado ondas de esfuerzos que viajan a lo largo del pilote como se describe con detalle en el numeral 2.1 del presente documento.

Al viajar la onda, ésta puede encontrar un cambio de la impedancia mecánica la cual puede consistir en un cambio de material (como ocurre en la punta del pilote), un cambio en la sección transversal del pilote o una grieta. Cuando la onda se encuentra con un cambio de impedancia, definida mediante la expresión (2.38), parte de la onda se refleja hacia arriba y parte se transmite hacia abajo. La onda que es reflejada al llegar de nuevo a la cabeza del pilote es registrada por el acelerómetro y la señal obtenida por el equipo PIT registra un pico (positivo o negativo) anterior a la llegada del reflejo de la punta.

La amplitud de la onda que es reflejada es función del ángulo de incidencia y es máximo cuando el ángulo es de  $90^0$  (CARINO, 2001 [2]). Para el caso de pilotes, y considerando que tan solo se propagan ondas longitudinales a lo largo del mismo, la deducción de los coeficientes de reflexión y transmisión se describe a continuación según el análisis realizado por Arnold Verruijt en la referencia [26] donde se analiza un pilote no homogéneo compuesto de dos materiales diferentes, el primero de mayor rigidez que el segundo como se muestra en la siguiente figura.



*Figura 37 Pilote analizado por Verruijt (2005) para la deducción de los coeficientes de reflexión y transmisión de ondas.*



En cualquier punto en que las ondas de esfuerzos sean observadas, éstas se mueven con una velocidad de partícula  $v_0$  y transmiten una fuerza axial  $F$ . (FINNO, 1997 [10]) La fuerza axial, y la velocidad están relacionadas a través de la expresión

$$F = v_0 \frac{EA}{c} = v_0 Z \quad (2.78)$$

Para la primera sección del pilote las ecuaciones básicas pueden ser escritas siguiendo los principios y planteamientos dados a través del análisis de la ecuación unidimensional de onda por el método de las características descrito en el numeral 2.4.3, de la siguiente forma

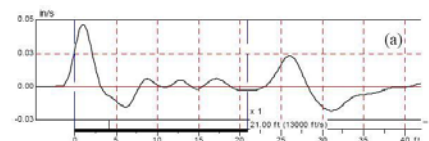
$$v = v_1 = f_1(x - c_1 t) + f_2(x + c_1 t) \quad (2.79)$$

Sabiendo que la fuerza puede ser escrita como  $F = \sigma A$  y despejando  $\sigma$  en términos de la expresión (2.78) se tiene que

$$\sigma = \frac{vZ}{A} \quad (2.80)$$

Luego el esfuerzo  $\sigma$  en la primera sección del pilote puede ser escrito en términos de la ecuación (2.79) como sigue

$$\sigma = \sigma_1 = -\rho_1 c_1 f_1(x - c_1 t) + \rho_1 c_1 f_2(x + c_1 t) \quad (2.81)$$



Las ecuaciones (2.79) y (2.81) satisfacen las dos ecuaciones diferenciales básicas (2.31) y (2.32) de la solución por el método de las características.

De igual manera para la segunda sección del pilote se tendrían las siguientes expresiones

$$v = v_2 = g_1(x - c_2t) + g_2(x + c_2t) \quad (2.82)$$

$$\sigma = \sigma_2 = -\rho_2c_2g_1(x - c_2t) + \rho_2c_2g_2(x + c_2t) \quad (2.83)$$

En la interfase de los dos materiales el valor de  $x$  es el mismo en ambas soluciones, tal que  $x = h$ , y la condición que se debe cumplir en dicho punto es que la velocidad  $v$  y el esfuerzo normal  $\sigma$  deben ser continuos para todos los valores del tiempo. Siguiendo dicho análisis se obtendría matemáticamente las siguientes relaciones

$$f_1(h - c_1t) + f_2(h + c_1t) = g_1(h - c_2t) + g_2(h + c_2t) \quad (2.84)$$

$$-\rho_1c_1f_1(h - c_1t) + \rho_1c_1f_2(h + c_1t) = -\rho_2c_2g_1(h - c_2t) + \rho_2c_2g_2(h + c_2t) \quad (2.85)$$

Las expresiones anteriores se pueden escribir de forma abreviada como

$$f_1(h - c_1t) = F_1(t) \quad (2.86)$$

$$f_2(h + c_1t) = F_2(t) \quad (2.87)$$

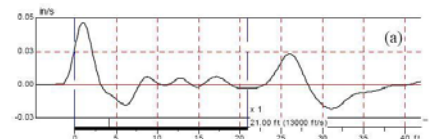
$$g_1(h - c_2t) = G_1(t) \quad (2.88)$$

$$g_2(h + c_2t) = G_2(t) \quad (2.89)$$

Para poder escribir las ecuaciones (2.84) y (2.85) de la siguiente manera

$$F_1(t) + F_2(t) = G_1(t) + G_2(t) \quad (2.90)$$

$$-\rho_1c_1F_1(t) + \rho_1c_1F_2(t) = -\rho_2c_2G_1(t) + \rho_2c_2G_2(t) \quad (2.91)$$



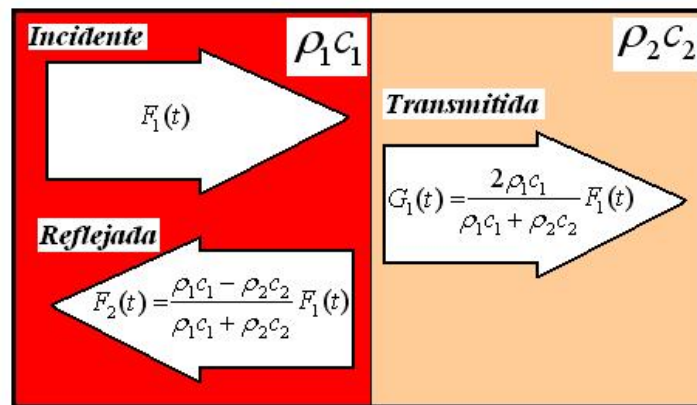
En general las anteriores ecuaciones son insuficientes para resolver los coeficientes de reflexión y transmisión ya que se tienen más incógnitas que ecuaciones. Sin embargo, si se asume que el pilote es muy largo de tal manera que la onda reflejada de la punta del pilote no llega todavía, se puede asumir que la solución de la onda que representa la reflexión de la punta es  $G_2(t) = 0$ . Con dicha consideración las soluciones para los coeficientes de reflexión  $F_2$  y transmisión  $G_1$  pueden ser expresados en términos de la onda inicial  $F_1$ . El resultado estaría expresado por los siguientes coeficientes

$$F_2(t) = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} F_1(t) \quad (2.92)$$

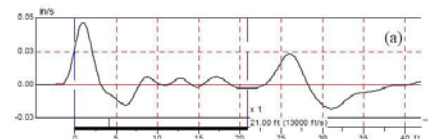
$$G_1(t) = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} F_1(t) \quad (2.93)$$

La figura 38 muestra la forma como sucedería el fenómeno en un cambio de impedancia ante la llegada de una onda  $F_1$ .

*Figura 38 Reflexión y transmisión de onda normal ante un cambio de impedancia  $Z$*



$$F_1(t) = F_2(t) + G_1(t)$$



Para entender la forma como ocurre el fenómeno de reflexión y transmisión se analizarán las anteriores ecuaciones mediante un ejemplo.

Si se asume que los materiales de la figura 37 tienen la misma densidad ( $\rho_1 = \rho_2$ ), pero la rigidez de la primera sección es 9 veces la rigidez de la segunda sección ( $E_1 = 9E_2$ ). Con dichas condiciones se obtiene una diferencia en la velocidad de onda correspondiente a  $c_1 = 3c_2$ . Se tendría como resultado los siguientes valores de coeficientes de reflexión y transmisión:

$$R_v = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = \frac{\rho_1 3c_2 - \rho_1 c_2}{\rho_1 3c_2 + \rho_1 c_2} = \frac{\rho_1 (3c_2 - c_2)}{\rho_1 (3c_2 + c_2)} = \frac{2c_2}{4c_2} = 0,5 \quad (2.94)$$

$$T_v = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = \frac{2\rho_1 3c_2}{\rho_1 3c_2 + \rho_1 c_2} = \frac{6\rho_1 c_2}{\rho_1 (3c_2 + c_2)} = \frac{6c_2}{4c_2} = 1.5 \quad (2.95)$$

La figura 39 muestra gráficamente cómo la onda de velocidad va viajando a lo largo del pilote y al encontrar el cambio de rigidez ocurre el fenómeno de reflexión y transmisión con magnitud de velocidades en el pilote correspondientes a los valores calculados  $R_v$  y  $T_v$ .

De manera similar se procede para analizar la propagación de esfuerzos en el pilote. Los coeficientes de reflexión y transmisión de esfuerzos son calculados usando las ecuaciones (2.81) y (2.83). El resultado sería:

$$R_\sigma = -\frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = -\frac{\rho_1 3c_2 - \rho_1 c_2}{\rho_1 3c_2 + \rho_1 c_2} = -\frac{\rho_1 (3c_2 - c_2)}{\rho_1 (3c_2 + c_2)} = -\frac{2c_2}{4c_2} = -0,5 \quad (2.96)$$

$$T_\sigma = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_1 + \rho_2 c_2} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 3c_2 + \rho_2 c_2} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 (3c_2 + c_2)} = \frac{2c_2}{4c_2} = 0.5 \quad (2.97)$$

En la figura 40 se muestra cómo la onda inicial de compresión para la primera parte del pilote, al encontrar la otra sección menos rígida, el esfuerzo se refleja de signo contrario o de tensión.

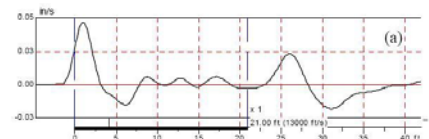
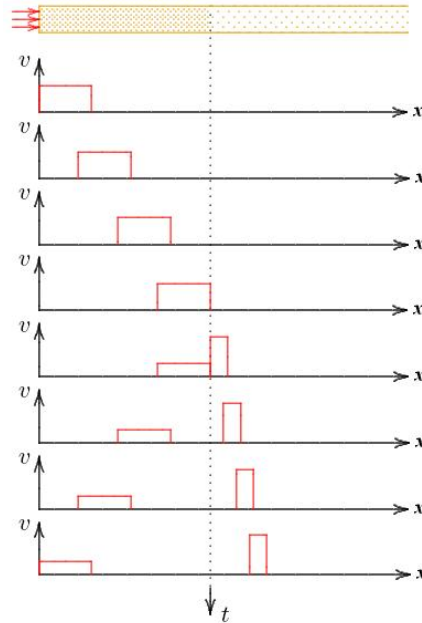


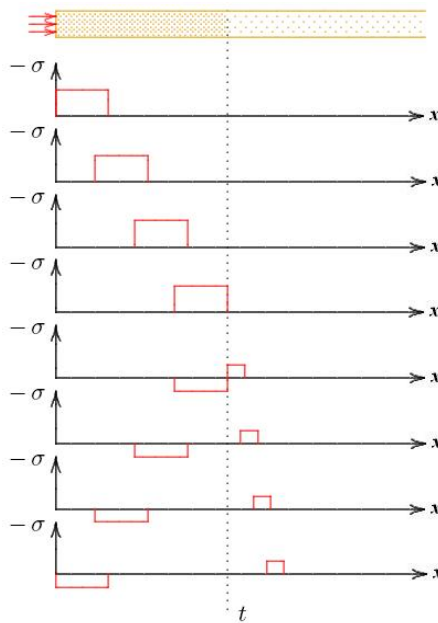


Figura 39 Reflexión y transmisión de la velocidad para  $Z_1 > Z_2$

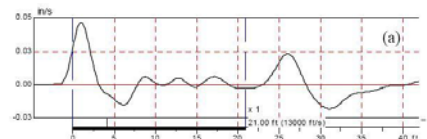


Fuente: Adaptado de [26] VERRUIJT, 2005

Figura 40 Reflexión y transmisión del esfuerzo para  $Z_1 > Z_2$

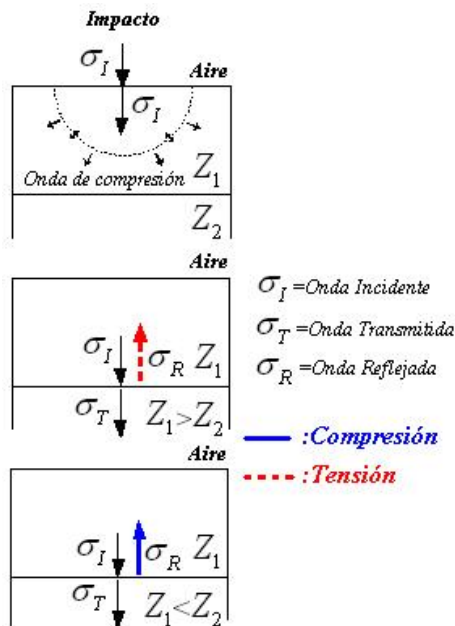


Fuente: Adaptado de [26] VERRUIJT, 2005

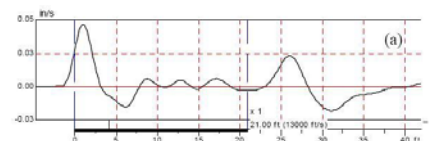


Se pueden analizar las expresiones (2.92) y (2.93) para los casos en donde al llegar la onda al final de la primera parte del pilote no encuentre otra segunda parte, o lo que es igual a tener un cambio de impedancia  $Z = 0$ . Dicha situación generaría que el coeficiente de reflexión para la velocidad  $R_v = 1$  y el coeficiente para la reflexión del esfuerzo tome el valor  $R_\sigma = -1$ . La anterior situación representaría muy bien el caso de un pilote bajo un suelo blando donde al llegar la onda de compresión a la punta, ésta se reflejaría de igual magnitud pero de signo contrario o de tensión. El anterior fenómeno es de gran importancia de análisis para el proceso de hincado de pilotes de concreto y la prueba de carga dinámica PDA, ya que si la energía de impacto del martillo que ejecuta el hincado es muy grande puede inducir esfuerzos de tensión al pilote que generen grietas y problemas posteriores. Por otro lado, el caso en donde la segunda parte del pilote tenga una impedancia  $Z = \infty$  el coeficiente de reflexión para la velocidad tomaría el valor  $R_v = -1$  y el del esfuerzo  $R_\sigma = 1$  lo que representaría la reflexión de una onda de compresión igual a la onda de incidencia. Dicho caso estaría dado por la cimentación del pilote en su punta por una roca o suelo muy rígido.

**Figura 41** Ondas de compresión y tensión ante un cambio de impedancia



Fuente: Adaptado de [10] FINNO, 1997



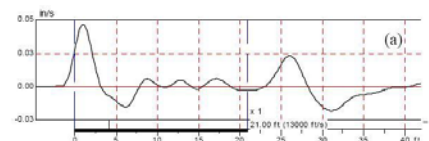
## 3. ANÁLISIS ESPECTRAL PARA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN PILOTES

### 3.1 INTRODUCCIÓN

El fenómeno de propagación de ondas en pilotes ha sido abordado de diferentes maneras de acuerdo a las herramientas y el conocimiento matemático que se posea en el momento. A través de los años han existido diversas metodologías analíticas para tratar el problema, de las cuales las más importantes se describieron en el numeral 2.4 del presente documento.

Una solución analítica que facilita la solución de la ecuación diferencial parcial al simplificar la variación del tiempo, es el método de síntesis de Fourier o de Análisis Espectral. Mediante el análisis espectral de propagación de ondas, una señal es vista como la superposición de diferentes ondas a diferentes frecuencias. Por tanto el problema de caracterizar una señal se convierte en determinar el conjunto coeficientes de combinación. Estos coeficientes son llamados la Transformada de Fourier de la señal que hacen que el problema que está siendo abordado se simplifique para que después de su manipulación, se realice la transformada inversa y reconstruir la señal inicial.

El método de análisis espectral para la propagación de ondas en pilotes usado para la implementación de la solución analítica, objeto del presente trabajo de grado sigue los lineamientos dados por James F. Doyle en su libro "Wave Propagation in Structures" de la referencia [6]. La metodología de análisis espectral usada por Doyle logra las transformadas de Fourier mediante la transformada discreta de Fourier (DFT) que en contraste con las transformadas continuas, representan la señal de entrada mediante un numero finito de ondas y tiene la gran ventaja que se puede usar el algoritmo matemático de la transformada rápida de Fourier (FFT) para lograr economía en el tiempo de procesamiento computacional.

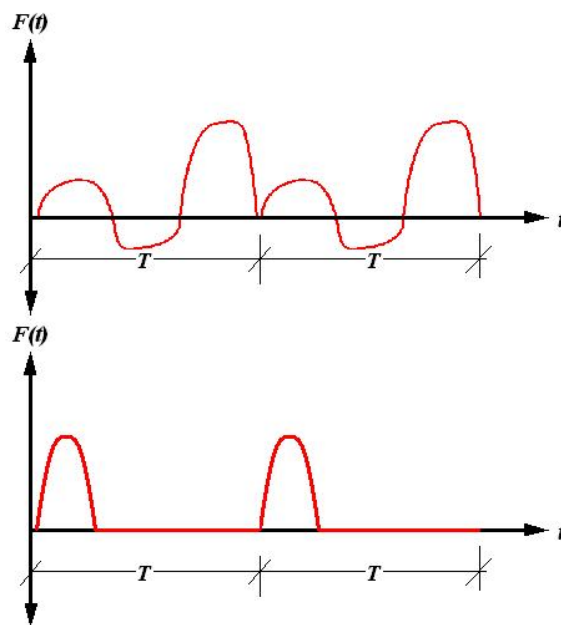


### 3.2 ANÁLISIS DE FOURIER

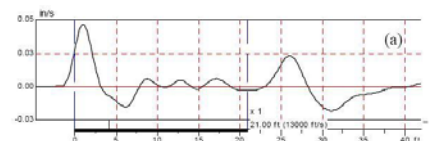
La serie de de Fourier y el análisis de Fourier tienen extensas aplicaciones en diferentes campos de la ciencia y las matemáticas. Para una función periódica en el tiempo, Fourier ha demostrado que dicha función se puede representar como la suma de un número infinito de términos de seno y coseno conocida como la serie de Fourier.

Una representación de una función como series de Fourier hace el supuesto que dicha función es periódica en el dominio del tiempo como en los casos de la figura 42

*Figura 42 Funciones periódicas en el dominio del tiempo*



Bajo las debidas circunstancias, si la señal de entrada tiene una larga duración de amplitud con valor en cero y el análisis asume que se repite en un período muy largo comparado con el tiempo de interés de la onda, entonces para todos los fines y propósitos se comporta como una onda infinita (DOYLE, 1989 [6]). La anterior situación se presenta en la gráfica inferior de la anterior figura y sería la representación de la función periódica dada por el pulso de entrada del martillo en la cabeza del pilote al realizar la prueba



Antes de considerar los conceptos generales de la transformada continua de Fourier (CFT), la transformada discreta de Fourier (DFT) y su posterior implementación computacional mediante la transformada rápida de Fourier (FFT), es necesario considerar algunos conceptos básicos de las series de Fourier.

Una función  $F(t)$  con período  $T$  puede ser escrita en forma de una serie de Fourier como:

$$\begin{aligned}
 F(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots a_n \cos n\omega t + \dots \\
 & + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots b_n \sin n\omega t + \dots
 \end{aligned}
 \quad (3.1)$$

O como

$$F(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) + b_n \sin \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) \right]
 \quad (3.2)$$

donde los coeficientes son

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) dt, n = 0, 1, 2, \dots
 \quad (3.3)$$

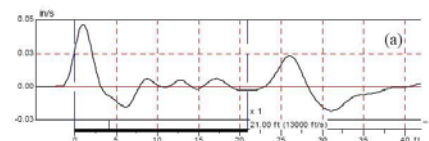
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) dt, n = 0, 1, 2, \dots
 \quad (3.4)$$

y la constante  $a_0$  representa el valor medio de la función periódica  $F(t)$ .

Haciendo uso de las identidades o relaciones de Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}
 \quad (3.5)$$

$$\sin \theta = \frac{-i}{2} [e^{i\theta} - e^{-i\theta}]
 \quad (3.6)$$



Donde  $i = \sqrt{-1}$ , y usando la frecuencia discreta como

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (3.7)$$

Se puede reescribir la ecuación (3.1) de la siguiente manera:

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i\omega_n t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i\omega_n t} \quad (3.8)$$

$$a_n + ib_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) e^{-i\omega_n t} dt, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

$$a_n - ib_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) e^{i\omega_n t} dt, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Y a su vez la ecuación (3.8) puede ser representada como la forma exponencial de la serie de Fourier, de manera más simple y compacta como

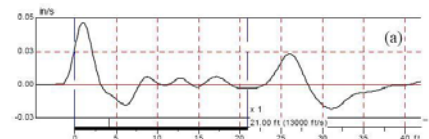
$$F(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i\omega_n t} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} \quad (3.11)$$

donde

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-i\omega_n t} dt, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.12)$$

La señal se repite cada  $T$  segundos y por tanto la frecuencia fundamental está dada por  $\omega_0 / 2\pi = f_0 = 1/T$ .

El intervalo de integración para la función periódica de la ecuación (3.12), ha sido seleccionado entre cero y  $T$ .



La forma exponencial de la serie de Fourier dada en la ecuación (3.11), tiene la ventaja de ser más sencilla que la forma expresada por series trigonométricas como la ecuación (3.1).

Para la determinación de los coeficientes  $C_n$ , así como para el cálculo de la respuesta de un sistema excitado por una fuerza que ha sido expresada en serie, existe un método eficiente denominado: el análisis discreto de Fourier, que se introduce más adelante.

### 3.3 TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER (CFT)

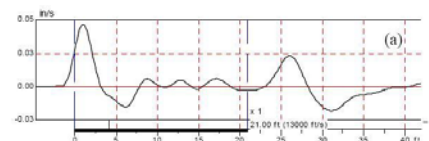
La transformada continua es la base para el análisis espectral ya que logra representar exactamente las funciones periódicas.

Para una función  $F(t)$ , definida en el dominio del tiempo de  $-\infty$  hasta  $\infty$ , la transformada continua de Fourier (CFT) está dada por

$$2\pi F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \quad (3.13)$$

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.14)$$

Donde  $C(\omega)$  es la transformada continua de Fourier (CFT),  $\omega$  es la frecuencia angular e  $i$  es el número complejo  $\sqrt{-1}$ . La ecuación (3.13) es la transformada inversa, mientras que la ecuación (3.14) es la transformada de la función ya que por lo general la señal a ser convertida está dada en el dominio del tiempo.

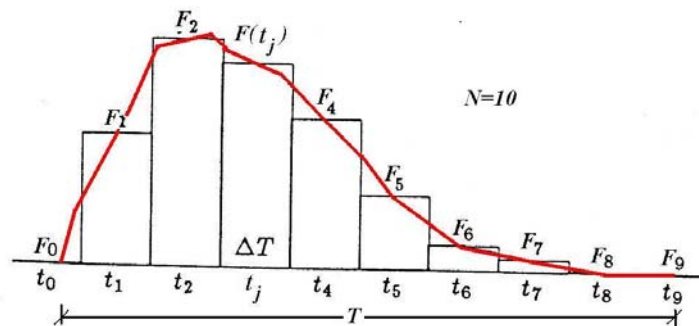


### 3.4 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

En el análisis de ondas, la perturbación se da desde menos infinito hasta más infinito en el dominio del tiempo y por tanto los componentes tienen una distribución continua conocida como la transformada continua de Fourier (DOYLE, 1989 [6]). Sin embargo, la evaluación numérica de la transformada requiere discretización de alguna manera, la cual se logra mediante el uso de la transformada discreta de Fourier (DFT).

La única diferencia significativa entre ambas transformadas, consiste en que en la transformada discreta de Fourier, el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia son periódicos lo cual hace que se represente una señal (con un período finito de tiempo  $T$ ) por un número finito de frecuencias.

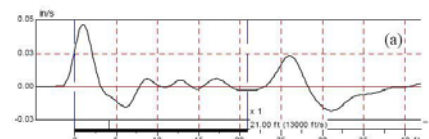
*Figura 43 Discretización para una función periódica en el tiempo*



*Fuente: Adaptado de [6] DOYLE, 1989*

Los coeficientes discretos de las series de Fourier se obtienen llevando a cabo integraciones continuas sobre el período del tiempo. Tales integraciones son reemplazadas por sumatorias como un paso para lograr la implementación numérica de la transformada continua.

Así como lo describe Mario Paz en la referencia [20] para el análisis discreto de Fourier, cuando una función periódica  $F(t)$  se especifica solamente por  $N$  puntos a intervalos





iguales de tiempo ( $\Delta T = T / N$ ) donde  $t_j = j\Delta T$ , las integrales de las ecuaciones (3.3) y (3.4) se pueden reemplazar por las sumas

$$a_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \cos n\omega t_j \Delta T \quad (3.15)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \sin n\omega t_j \Delta T, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

en donde  $\omega = 2\pi / T$ . Como en las anteriores definiciones los coeficientes de Fourier han sido ligeramente alterados por la omisión del factor 2 en las expresiones para  $a_n$  y  $b_n$ , entonces la ecuación (3.2) se escribe como

$$F(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \quad (3.17)$$

Si se usa la notación compleja para  $C_n$ , se puede combinar las ecuaciones (3.15) y (3.16) en una sola ecuación mediante la definición

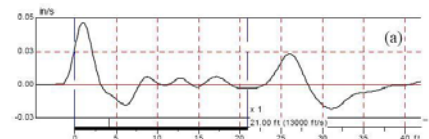
$$C_n = a_n - ib_n \quad (3.18)$$

y la aplicación de la relación de Euler

$$e^{-in\omega t_j} = \cos n\omega t_j - i \sin n\omega t_j \quad (3.19)$$

para obtener

$$C_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-in\omega t_j} \Delta T \quad (3.20)$$



Sustituyendo los valores  $t_j = j\Delta T$ ,  $T = N\Delta T$ , y  $\omega = 2\pi/T$  en la ecuación (3.20), se obtiene

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-2\pi i(nj/N)}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

La ecuación (3.21) es una fórmula aproximada para calcular los coeficientes complejos de Fourier en la ecuación (3.12).

Según Mario Paz (Referencia [20]), los coeficientes discretos dado por la ecuación (3.21) no proporcionan información suficiente para obtener una función continua de  $F(t)$ ; sin embargo, es de gran importancia, ya que nos permite obtener con exactitud todos los valores discretos de la serie  $F(t_j)$ . Este hecho nos conduce a la definición formal de la transformada discreta de Fourier (DFT) para la serie  $[F(t_j)]$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , dado por

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-2\pi i(nj/N)}, n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (3.22)$$

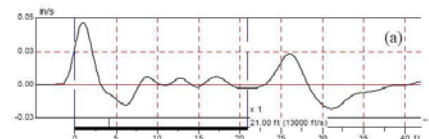
y de su transformada discreta inversa

$$F(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{2\pi i(nj/N)}, j = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (3.23)$$

**3.4.1 Ejemplo Numérico.** El siguiente ejemplo se presenta como ayuda para comprender mejor el proceso realizado por la transformada discreta de Fourier, adaptado del ejemplo realizado por James F. Doyle en la referencia [6].

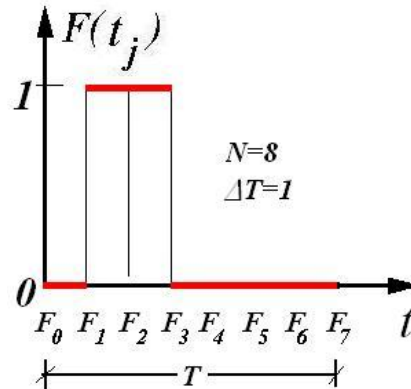
Si se considera una función real dada por los siguientes puntos

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{y} \quad F_0 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_7 = 0$$



Con  $\Delta T = 1, N = 8$ . Se tiene un pulso de forma rectangular como lo muestra la figura 44

Figura 44 Ejemplo de pulso rectangular con valores reales en el dominio del tiempo



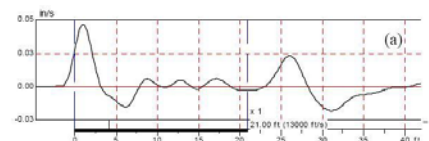
Como se puede observar, se representan ocho puntos y se supone que la señal se repite posteriormente. La transformada se convierte en

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-2\pi i(nj/N)} = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^7 F(t_j) e^{-2\pi i(nj/8)} \quad (3.24)$$

La cual genera de forma explícita las siguientes transformadas para los primeros diez puntos

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 2.0 \\
 C_1 &= 0.707 - 1.707i \\
 C_2 &= -1.0 - 1.0i \\
 C_3 &= -0.707 + 0.293i \\
 C_4 &= 0.0 \rightarrow \text{Valor de Nyquist} \\
 C_5 &= -0.707 - 0.293i \\
 C_6 &= -1.0 + 1.0i \\
 C_7 &= 0.707 + 1.707i \\
 C_8 &= 2.0 \\
 C_9 &= 0.707 - 1.707i
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Fuente: Adaptado de [6] DOYLE, 1989



Al analizar las transformadas se puede observar que cada uno de los valores posee una parte real y otra imaginaria, siendo pues números complejos. Igualmente se puede observar que a partir del valor  $C_7$  se empiezan a repetir los valores transformados. Igualmente se puede observar que a partir del valor  $C_4$  el valor de la parte real es simétrico para los valores inferiores y superiores, mientras que los valores imaginarios son antisimétricos. El valor  $C_4$  es comúnmente llamado el valor Nyquist.

**3.4.2 Frecuencia de Nyquist y fenómeno de Alias.** La frecuencia de Nyquist o frecuencia de doblez está dada en radianes por segundo por

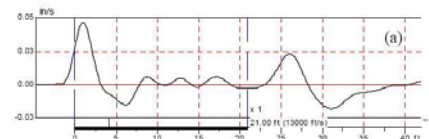
$$\omega_{Nyquist} = \frac{2\pi N/2}{T} = \frac{2\pi N/2}{N\Delta T} = \frac{\pi}{\Delta T} \quad (3.26)$$

o en ciclos por segundo por

$$f_{Nyquist} = \frac{\omega_{Nyquist}}{2\pi} = \frac{1}{2\Delta T} \quad (3.27)$$

Al analizar los resultados obtenidos en la transformada (3.25) se puede observar que la simetría alrededor del valor de Nyquist es una consecuencia de tener una señal de entrada en números reales únicamente y tiene la particularidad que no se pierde información cuando una señal real de  $N$  puntos se transforma en  $N/2$  puntos complejos. Esta situación hace que el rango de frecuencia útil sea hasta dicha frecuencia.

El análisis de la frecuencia de Nyquist es importante, ya que como menciona Mario Paz en la referencia [20]; "Si la función original contiene componentes de frecuencia más alta que la frecuencia de Nyquist, estas componentes de frecuencias altas producen distorsiones en las componentes de baja frecuencia de la serie" Dicho fenómeno es conocido con el nombre



de "alias" y para evitarlo es necesario que el número de puntos  $N$  seleccionado sea por lo menos dos veces el orden de la componente armónica más alta presente en la función.

### 3.5 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

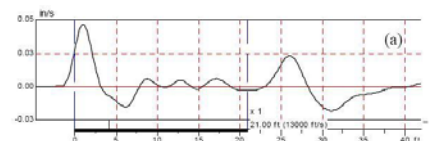
Una forma eficiente que reduce tiempo de cálculo computacional para llevar a cabo la transformada discreta de Fourier (DFT) es mediante el algoritmo numérico llamado transformada rápida de Fourier (FFT) que no es una transformada diferente ya que obtiene exactamente los mismos resultados que la transformada discreta.

El algoritmo correspondiente a la transformada rápida de Fourier (FFT) es complejo y no se hace necesario profundizar sobre sus detalles para el objeto del presente documento. Para implementar la transformada rápida existen diversas aplicaciones computacionales disponibles en diferentes lenguajes de programación para las cuales es necesario conocer y entender los parámetros de entrada para su procedimiento de cálculo.

Como particularidad, cabe anotar que el algoritmo FFT se hace eficiente cuando el número  $N$  de puntos que definen la función periódica es una potencia de 2, esto es cuando

$$N = 2^m \quad (3.28)$$

en donde  $M$  es un entero.



### 3.6 ANÁLISIS ESPECTRAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La ventaja de la descripción espectral de ondas consiste en expresar los cambios de fase en los que incurre la onda a medida que se va propagando de un punto a otro, lo cual es posible haciendo uso de las ecuaciones diferenciales que gobiernan los fenómenos dinámicos.

Para comprender la forma en que el análisis espectral de ecuaciones diferenciales se lleva a cabo, es necesario considerar las propiedades generales de las soluciones independientemente de sus aplicaciones estructurales.

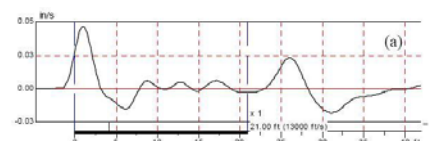
Como se introdujo en el numeral 2.4.4 la idea es remover la variación del tiempo en las ecuaciones diferenciales usando la representación espectral de la solución y de ésta manera generar una nueva ecuación diferencial para los coeficientes, que en la mayoría de los casos se puede integrar directamente.

**3.6.1 Representación Espectral de Derivadas.** La ecuación diferencial parcial que define la propagación unidimensional de ondas está dada en términos de derivadas de espacio y tiempo.

En el numeral 2.4.4 se mencionó que la representación espectral correspondiente a la solución de una posición arbitraria es

$$u(x, t) = \sum \hat{u}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.29)$$

Dado que la ecuación diferencial parcial (2.10) es lineal, como se clasificó en el numeral 2.3, es posible aplicar la representación espectral a cada término. Por tanto la representación espectral para la derivada del tiempo es



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum \hat{u}_n e^{i\omega_n t} = \sum i\omega_n \hat{u}_n e^{i\omega_n t} \quad (3.30)$$

que de forma abreviada se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow i\omega_n \hat{u}_n \quad \text{ó} \quad i\omega \hat{u} \quad (3.31)$$

Para derivadas del tiempo de orden general la representación espectral es

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} \Rightarrow i^m \omega_n^m \hat{u}_n \quad \text{ó} \quad i^m \omega^m \hat{u} \quad (3.32)$$

Como se puede analizar, las expresiones algebraicas de los coeficientes de Fourier reemplazan las derivadas del tiempo, haciendo que se reduzca el número de derivadas.

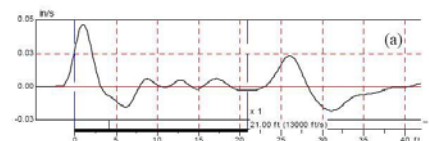
Igualmente, las derivadas espaciales se representan espectralmente como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum \hat{u}_n e^{i\omega_n t} = \sum \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} e^{i\omega_n t} \quad (3.33)$$

Y de forma corta como

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \quad (3.34)$$

Aunque para éstas derivadas no existe reducción aparente, en las derivadas del tiempo al remover el tiempo como variable independiente, las derivadas parciales se convierten en derivadas ordinarias que son más fáciles de integrar.



**3.6.2 Relación Espectral.** Si se considera la siguiente ecuación diferencial homogénea, lineal (en una dimensión) en la variable dependiente  $u(x, t)$

$$u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \dots = 0 \quad (3.35)$$

Para la cual existe solución de la forma  $e^{kx}$ , donde  $k$  se obtiene al resolver la ecuación algebraica característica

$$A_1 + A_2 k + A_3 k^2 + \dots = 0 \quad (3.36)$$

Es usual en el análisis de ondas, asumir que  $k$  es complejo y que las soluciones son de la forma

$$\hat{u}(x) = C e^{ikx} \quad (3.37)$$

Por ejemplo, si se considera la ecuación diferencial

$$a\hat{u} + \frac{d\hat{u}}{dx} = 0 \Rightarrow [a+k]C = 0 \quad (3.38)$$

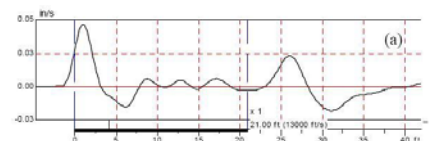
que lleva a la solución

$$k = -a$$

$$\hat{u}(x) = C e^{-ax} \quad (3.39)$$

Donde  $C$  es la constante de integración.

De manera similar se procede para la siguiente ecuación diferencial de segundo orden.





$$au + \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \Rightarrow [a + k^2]C = 0 \quad (3.40)$$

que lleva a la solución

$$k = \pm\sqrt{a}$$

$$\hat{u}(x) = C_1 e^{i\sqrt{a}x} + C_2 e^{-i\sqrt{a}x} \quad (3.41)$$

Se puede observar que existen dos soluciones debido a la potencia de dos para  $k$ .

En el análisis espectral de ondas, la relación entre el valor de  $k$  (llamado número de onda) y la frecuencia  $\omega$  es llamada *relación espectral*. La solución para  $\hat{u}(x)$  está dada por la superposición de diferentes soluciones  $m$  de la siguiente manera

$$\hat{u}(x) = C_1 e^{ik_1 x} + C_2 e^{ik_2 x} + \dots + C_m e^{ik_m x} \quad (3.42)$$

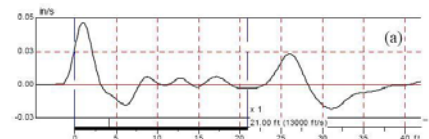
Existen tantas soluciones como raíces de la ecuación característica (3.36) y eso no debe confundirse con el número de soluciones para cada frecuencia. De ésta manera la solución total se escribe como

$$u(x, t) = \sum_n (C_{1n} e^{ik_{1n} x} + C_{2n} e^{ik_{2n} x} + \dots + C_{mn} e^{ik_{mn} x}) e^{i\omega_n t} \quad (3.43)$$

Dicha solución puede ser expresada para cualquier problema como

$$u(x, t) = \sum F_n G(k_{mn} x) e^{i\omega_n t} \quad (3.44)$$

Donde  $F_n$  es el espectro de amplitud y  $G(k_{mn} x)$  es la función de transferencia del sistema.



El análisis de la ecuación diferencial parcial que rige la propagación unidimensional de ondas en pilotes, combinado con las condiciones de frontera, determinan las formas particulares de  $G$  y  $k_m(\omega)$ .

**3.6.3 Solución espectral de la Ecuación de Onda unidimensional.** Considerando la ecuación de onda unidimensional más sencilla dada en (2.10) y aplicando la representación espectral de las derivadas, se tiene que

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \omega^2 a^2 \hat{u} = 0 \quad (3.45)$$

Dado que la ecuación tiene coeficientes constantes, se asume que  $Ce^{ikx}$  es una solución que tiene la ecuación característica

$$[-k^2 + \omega^2 a^2]C = 0 \quad (3.46)$$

Para la cual los dos modos de  $k$  son

$$k_1(\omega) = +\omega a, \quad k_2(\omega) = -\omega a, \quad (3.47)$$

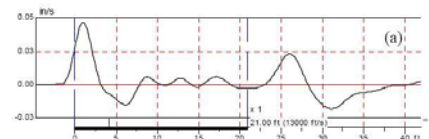
Y por tanto la solución general de la ecuación (2.10) estaría dada por la expresión

$$u(x, t) = \sum (C_1 e^{i\omega a x} + C_2 e^{-i\omega a x}) e^{i\omega t} = \sum C_1 e^{i\omega(a x + t)} + \sum C_2 e^{-i\omega(a x - t)} \quad (3.48)$$

O lo que es igual a

$$\sum C_1 e^{i(kx + \omega t)} + \sum C_2 e^{-i(kx - \omega t)} \quad (3.49)$$

Que corresponde a la solución de dos ondas viajando: una hacia el frente y otra hacia atrás.



**3.6.4 Velocidad de fase.** A una frecuencia determinada, el número de onda  $k$  puede ser escrito en términos de su parte real y su parte imaginaria como

$$k = k_R - ik_I \quad (3.50)$$

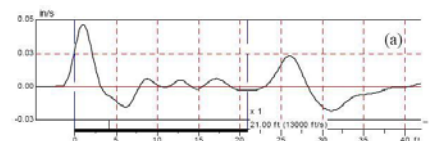
Para dar a la solución de la ecuación (3.49) la forma

$$u(x,t) = \sum \widehat{F}_n e^{-k_I x} e^{-i(k_R x - \omega t)} \quad (3.51)$$

Que como se puede observar tiene tres partes: Un espectro de amplitud  $\widehat{F}_n$ , un término de decaimiento exponencial  $e^{-k_I x}$ , y la propagación de ondas  $e^{-i(k_R x - \omega t)}$ . La velocidad de fase para la propagación de ondas está dada por

$$v_f = \frac{\omega}{k_R} \quad (3.52)$$

La cual es importante para definir si las ondas que viajan se dispersan en el espacio y tiempo o no. Cuando la velocidad de fase  $v_f$  es constante respecto a la frecuencia, la señal no es dispersiva y mantendrá su forma a lo largo del tiempo y espacio, y por el contrario cuando la velocidad de fase no es constante con respecto a la frecuencia, la señal es dispersiva y sufrirá cambios.

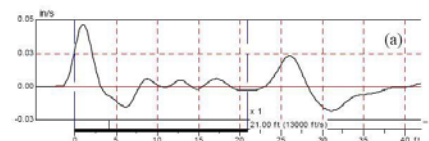


## 4. IMPLEMENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN UNIDIMENSIONAL DE ONDAS EN PILOTES

De todos los posibles tipos de análisis presentados en el numeral 2.4 para la solución de la ecuación diferencial parcial que gobierna el fenómeno de propagación unidimensional de ondas en pilotes, se ha escogido la metodología de análisis espectral, basado en la Transformada Rápida de Fourier (FFT), entre otras por las siguientes razones frente a las demás metodologías analíticas:

- Posibilidad de investigar los cambios de fase en el dominio de la frecuencia a medida que la onda viaja en el pilote.
- Remueve la variación del tiempo para replantear la ecuación diferencial parcial de forma espectral haciendo que ésta se vuelva ordinaria y pueda ser integrada directamente. (Las expresiones algebraicas en los coeficientes de Fourier reemplazan las derivadas del tiempo como se explicó en el numeral 3.6.1)
- Facilidad de incorporar a la ecuación diferencial parcial los efectos de fuerzas retardantes debidos al suelo y al amortiguamiento del pilote mismo sin complicar la solución a la ecuación diferencial parcial.
- Facilidad en el entendimiento conceptual de la solución al ser representada ésta como una onda que viaja hacia la izquierda y otra a la derecha teniendo en cuenta las condiciones de frontera del sistema
- Facilidad de incorporar discontinuidades y cambios de sección a la solución de problemas más específicos.

Así como lo afirma James F. Doyle en la referencia [6] "cabe anotar que aunque el método de análisis espectral implementado hace uso de un computador, no es un método numérico en el sentido común ya que la descripción analítica de las ondas se mantiene" y por tanto es considerado como una solución analítica.



## 4.1 PROPAGACIÓN Y RECONSTRUCCIÓN DE ONDAS

La versatilidad de abordar el fenómeno de propagación de ondas en una dimensión, usando las ecuaciones diferenciales respectivas, mediante la metodología espectral, consiste en que una vez se caracteriza la señal de entrada en una posición del espacio, se puede posteriormente conocer en todas las posiciones, y por tanto la propagación se vuelve una cuestión sencilla.

La figura 45 conceptualiza el procedimiento básico necesario para lograr el análisis de propagación de ondas.

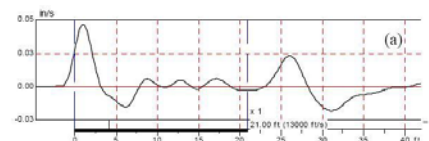
**4.1.1 Algoritmo Básico.** La solución de problemas de ondas, en su forma más simple, se representa por

$$u(x,t) = \sum_n \widehat{F}_n [G_1(k_{1n}x) + G_2(k_{2n}x) + \dots] e^{i\omega_n t} = \sum \widehat{F}_n G(k_{mn}x) e^{i\omega_n t} \quad (4.1)$$

donde  $G$  es la función de transferencia analítica conocida del problema que es función de la posición  $x$  y tiene diferentes valores numéricos para cada frecuencia.  $\widehat{F}_n$  es el espectro de amplitud conocido por las condiciones de entrada o pulso inicial. El producto  $\widehat{F}_n G$  es conocido como la transformada de Fourier de la solución que es diferente en cada posición, pero una vez se evalúa en un punto, su inversa inmediatamente brinda la historia de soluciones para una posición particular.

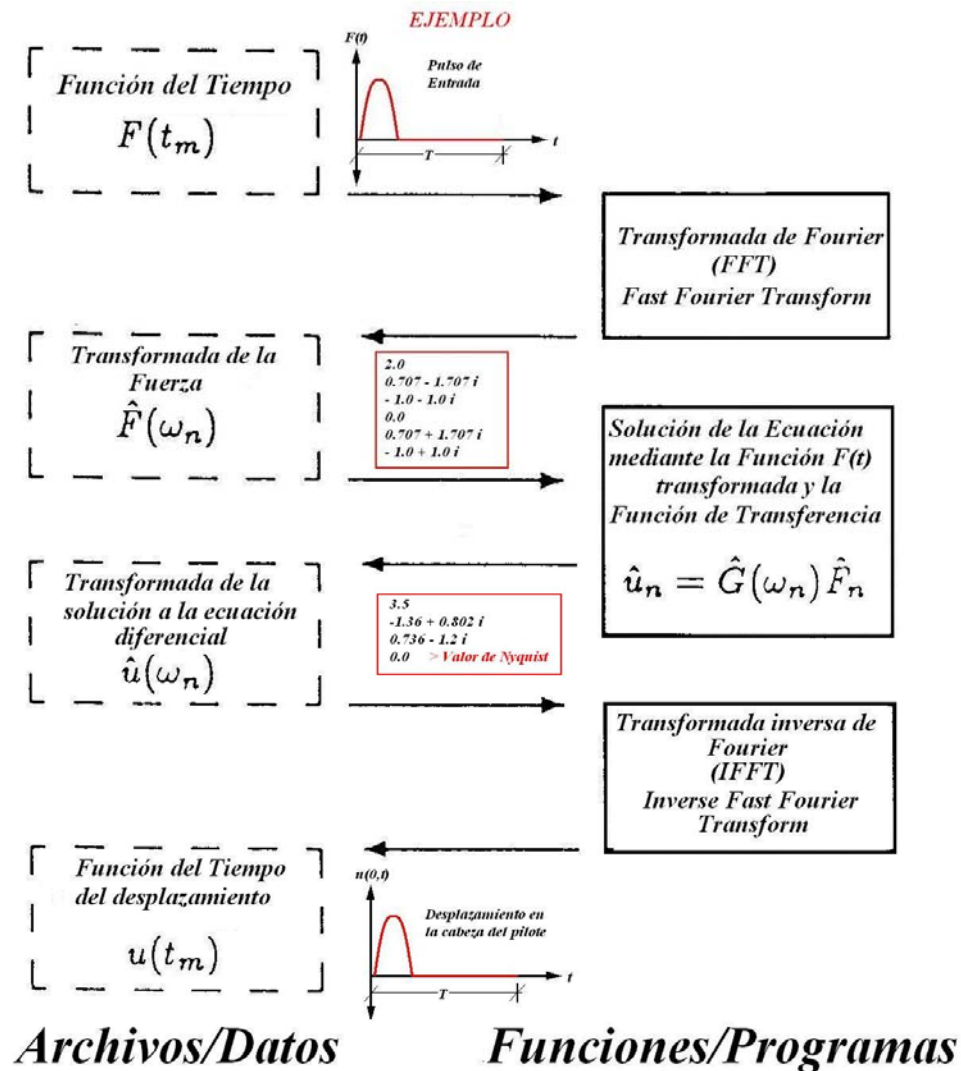
En la figura No.44 se observa que el esquema del algoritmo básico consiste en primero convertir la señal de entrada  $F(t)$  en su forma espectral  $\widehat{F}_n$  a través del uso de la función FFT (Transformada Rápida de Fourier). La solución transformada se obtiene al evaluar el producto

$$\hat{u}_n = \widehat{F}_n G(k_{mn}) \quad (4.2)$$

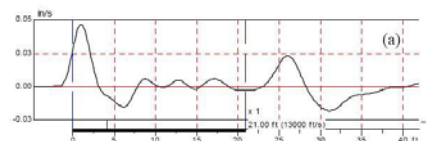


para cada frecuencia. Finalmente la solución se reconstruye en el dominio del tiempo por medio del uso de la función de la transformada de Fourier inversa (IFFT). Cabe anotar que al realizar la inversión usando la transformada de Fourier inversa, el producto  $\hat{F}_n G$  se evalúa sólo hasta la frecuencia de Nyquist para asegurar que la historia de la solución reconstruida sea real.

**Figura 45 Metodología general de análisis espectral para propagación de ondas**



Fuente: Adaptado de [6] DOYLE, 1989



## 4.2 SOLUCIÓN ESPECTRAL BÁSICA PARA ONDAS EN PILOTES

Al expresar la ecuación (2.9) demostrada en el numeral 2.2, de forma espectral se obtiene la siguiente ecuación homogénea

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{d\hat{u}}{dx} \right) + \omega^2 \rho A \hat{u} = 0 \quad (4.3)$$

Si se asume que tanto el módulo de elasticidad  $E$  y el área  $A$  no varían respecto a la posición, entonces la ecuación diferencial homogénea para los coeficientes de Fourier se convierte en

$$EA \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \omega^2 \rho A \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad E \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \omega^2 \rho \hat{u} = 0 \quad (4.4)$$

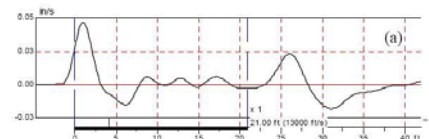
Dado que la anterior ecuación tiene coeficientes constantes, entonces tiene la solución de la forma

$$\hat{u}(x) = A e^{-ikx} + B e^{+ikx}, \quad k = \omega a = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (4.5)$$

Donde  $A$  y  $B$  son las amplitudes indeterminadas para cada frecuencia. Cuando se combina con la variación del tiempo, la solución corresponde a dos ondas: una que viaja a la derecha y otra a la izquierda. Esto es

$$u(x, t) = \sum A e^{-i(kx - \omega t)} + \sum B e^{+i(kx + \omega t)} \quad (4.6)$$

Los valores de  $(A, B, k)$  dependen de la frecuencia  $\omega_n$ .



**4.2.1 Comportamiento de las propiedades mecánicas.** Las siguientes propiedades mecánicas, para una frecuencia particular, se presentan en las dos ondas representadas en la solución (4.6), en donde para la onda que viaja a la derecha el subíndice utilizado es  $i$  y para la onda que viaja a la izquierda el subíndice utilizado es  $r$ . Las propiedades mecánicas estarían dadas en la siguiente tabla

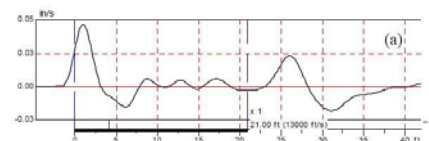
**Tabla 6** Propiedades mecánicas en la propagación de ondas

	ONDA QUE VIAJA A LA DERECHA $\rightarrow$	ONDA QUE VIAJA A LA IZQUIERDA $\leftarrow$
<b>DESPLAZAMIENTO</b>	$u_i = Ae^{-i(kx-\omega t)}$	$u_r = Be^{+i(kx+\omega t)}$
<b>VELOCIDAD</b>	$\dot{u}_i = i\omega u_i$	$\dot{u}_r = i\omega u_r$
<b>ACELERACIÓN</b>	$\ddot{u}_i = i^2\omega^2 u_i$	$\ddot{u}_r = i^2\omega^2 u_r$
<b>ESFUERZO</b>	$\sigma_i = -ikEu_i$	$\sigma_r = ikEu_r$
<b>DEFORMACIÓN</b>	$e_i = -iku_i$	$e_r = iku_r$
<b>FUERZA</b>	$F_i = -ikEAu_i$	$F_r = ikEAu_r$

Fuente: Adaptado de [6] DOYLE, 1989

Se puede observar en la anterior tabla que las propiedades correspondientes al esfuerzo, deformación y fuerza para la onda que viaja a la izquierda tienen signo opuesto que las mismas propiedades pero para la onda que viaja a la derecha.

**4.2.2 Historia de Fuerza aplicada en la cabeza del pilote.** Las ondas de esfuerzos que se propagan a lo largo del pilote son el resultado del impacto generado por el martillo al realizar la prueba PIT. Inmediatamente se realiza el impacto, se producen ondas de esfuerzos y el correspondiente frente de onda se crea como se describió en el numeral 2.1 del presente documento





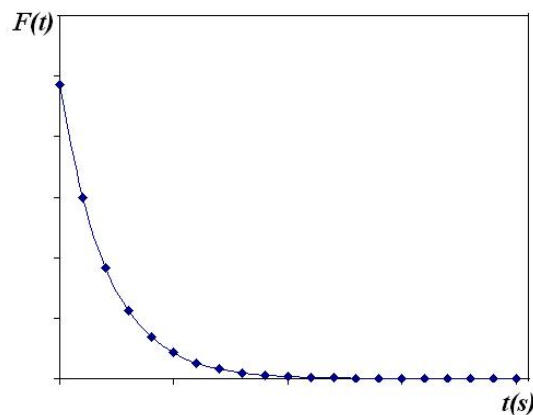
Generalmente el movimiento de una estructura es generado por un impacto. Para el análisis matemático del impacto es necesario considerar tres aspectos según Doyle: "...el movimiento de la estructura, el movimiento del martillo y la relación existente entre ambos."<sup>1</sup> En el análisis de la fuerza de contacto que realiza Doyle en el Apéndice A de la referencia [6], luego de plantear las ecuaciones de movimiento en términos de ecuaciones diferenciales e igualar el movimiento del martillo al de la estructura, se llega a la siguiente historia de fuerzas en la barra de análisis

$$F(t) = \frac{V_s m_s}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{m_s c_0}{EA} \quad (4.7)$$

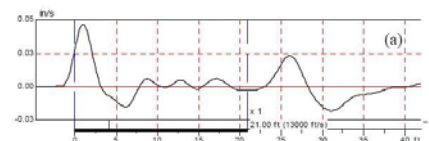
En donde,  $V_s$  es la velocidad del impacto,  $m_s$  es la masa del martillo que realiza el impacto,  $c_0$  es la velocidad de propagación de onda en el concreto,  $E$  es el módulo de elasticidad del concreto y  $A$  es la sección transversal de la barra.

De manera esquemática, la historia de fuerza en el tiempo dada por la ecuación (4.7) tendría la forma que se observa en la siguiente figura.

*Figura 46 Pulso de entrada modelado mediante la ecuación (4.7)*



<sup>1</sup> [5] DOYLE. James F. Wave Propagation in Structures. New York: Editorial Springer-Verlag. 1989 Apéndice A



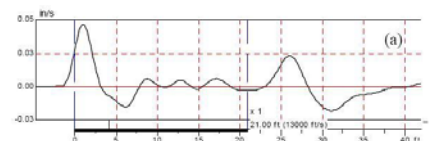
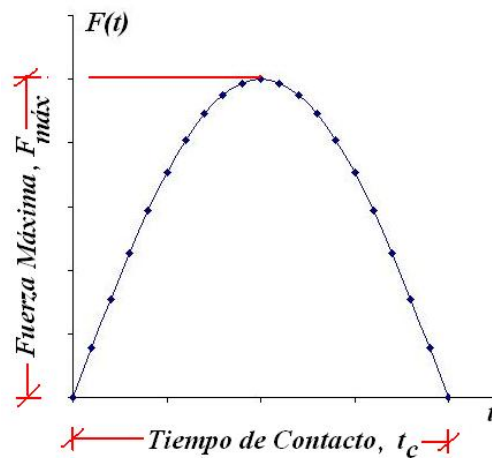
La representación matemática del fenómeno físico mediante la expresión (4.7), aunque asume en su deducción algunas consideraciones válidas, no representa el pulso de entrada de la prueba que en los diferentes resultados de la prueba PIT ha mostrado que tiene la forma positiva de una función seno. Richard J. Finno, en la referencia [10], afirma que la función de la fuerza en el tiempo se puede aproximar a una curva de la mitad del ciclo de la función seno (Half-cycle sine curve) por medio de la siguiente ecuación:

$$F(t) = F_{\text{máx}} \sin\left(\pi \frac{t}{t_c}\right) \quad \text{para: } 0 \leq t \leq t_c \quad (4.8)$$

Donde,  $F_{\text{máx}}$  es el valor máximo que toma la fuerza durante el tiempo de contacto del martillo en el pilote y  $t_c$  es el tiempo de contacto del martillo en la cabeza del pilote.

La representación del pulso de entrada mediante la expresión (4.8) para cualquier valor de  $F_{\text{máx}}$  y  $t_c$  se vería como lo muestra la siguiente figura.

**Figura 47** Pulso de entrada de la forma de la mitad del ciclo de la función seno



**4.2.3 Solución para una onda viajando a la derecha.** Al asumir que el pulso de entrada o historia de fuerza se modela por medio de la ecuación (4.8), ésta se puede igualmente expresar en términos de la ley de elasticidad en la cabeza del pilote ( $x = 0$ ) de la siguiente manera:

$$\text{en } x = 0: \quad EAe = EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = F(t) \quad (4.9)$$

La ecuación (4.9) puede ser representada de forma espectral de tal forma que la condición de frontera en la cabeza del pilote se exprese como

$$EA \frac{d}{dx} \sum_n \hat{u}_n(x) e^{i\omega_n t} = \sum_n \hat{F}_n e^{i\omega_n t} \quad (4.10)$$

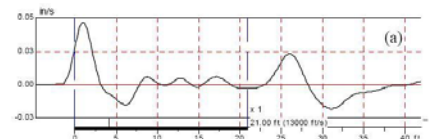
Para la condición en  $x = 0$  (en la cabeza del pilote) y usando la solución de la ecuación diferencial parcial para la propagación unidimensional de ondas dada en (4.6) se tiene una sola onda viajando hacia la derecha. Por tanto se tiene en forma espectral que

$$EAe = EA[-ikA] = \hat{F} \quad \text{ó} \quad A = -\frac{\hat{F}}{ikEA} \quad (4.11)$$

y la solución de la ecuación (4.6) en la cabeza del pilote para una onda que viaja a la derecha está dada por

$$u(x,t) = -\sum \frac{\hat{F}}{ikEA} e^{-i(kx-\omega t)} \quad (4.12)$$

Como la historia de fuerzas es conocida para todo el tiempo de análisis en que la onda viaja a través del pilote, entonces obtener resultados de desplazamiento de cualquier punto en el tiempo mediante la expresión (4.12) y por consiguiente cualquier otro valor relacionado



como la velocidad, esfuerzo, deformación o fuerza puede determinarse con una adecuada selección de los valores de las variables que influyen en la solución. En el numeral 4.3 se detallan las diferentes soluciones y su respectiva simulación en MATLAB para diferentes casos de propagación de ondas en pilotes.

**4.2.4 Condiciones de Frontera.** La onda incidente causada por el pulso de entrada genera ondas que se reflejan a la llegada de una frontera, de tal forma que ambas se superponen allí para satisfacer las condiciones de frontera. Las únicas ondas que pueden ser representadas están dadas por la expresión (4.6), donde **A** está asociada a la onda incidente conocida y **B** está asociada con la onda desconocida que se refleja. Las condiciones de frontera están dadas en los siguientes términos:

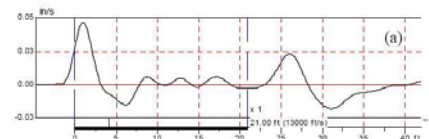
$$\begin{aligned}
 \text{Desplazamiento: } & u, \dot{u}, \ddot{u}, \\
 \text{Fuerza: } & EA \frac{\partial u}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

En función de los anteriores términos se pueden escribir diferentes tipos de fronteras como se muestra en la siguiente tabla.

*Tabla 7 Condiciones de frontera típicas para considerar en pilotes*

CONDICIÓN DE FRONTERA	ECUACIÓN	FORMA ESPECTRAL
Libre	$EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$	$EA \frac{d\hat{u}(x)}{dx} = 0$
Elástica (Resorte)	$EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -Ku(x,t)$	$EA \frac{\partial \hat{u}(x)}{\partial x} = -K\hat{u}(x)$
Plástica (Amortiguador)	$EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\eta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$	$EA \frac{\partial \hat{u}(x)}{\partial x} = -\eta i \omega \hat{u}(x)$
Inercial (Masa)	$EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$	$EA \frac{\partial \hat{u}(x)}{\partial x} = -m i \omega^2 \hat{u}(x)$

Fuente: Adaptado de [6] DOYLE, 1989

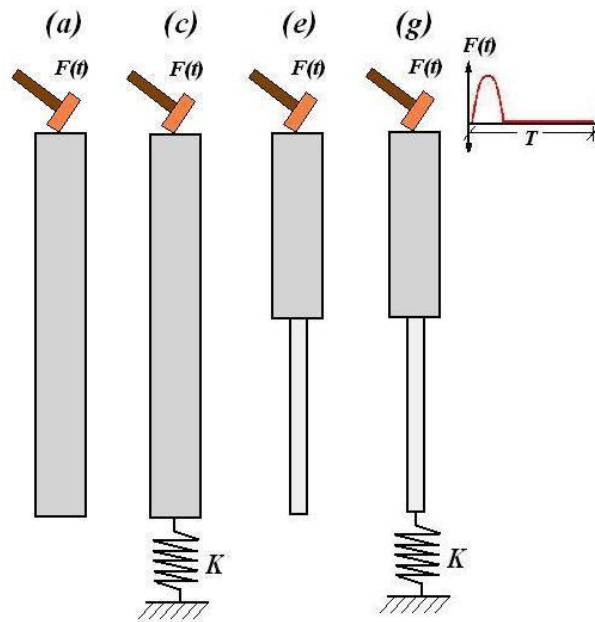


En pilotes se pueden considerar las siguientes fronteras para modelar la prueba PIT

- Cambios de sección transversal
- Punta del pilote apoyada en suelo muy blando o con su punta libre
- Punta del pilote apoyada en suelo o roca muy rígida

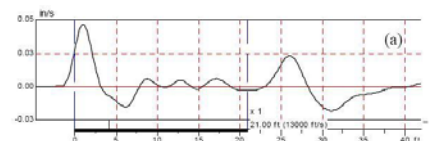
De manera gráfica se podrían simular las fronteras típicas en pilotes con o sin fuerzas retardantes mostradas a continuación.

*Figura 48 Fronteras típicas en pilotes para modelar la prueba PIT*



En donde la frontera (a) representaría un pilote con sección transversal constante, libre en su punta, la frontera (b) el mismo pilote pero con restricción en su punta por un resorte de rigidez  $K$ , la frontera (c) y (d) un pilote con cambio de sección transversal sin y con resorte en la punta respectivamente.

Vale mencionar que ante una frontera en donde existe un cambio de sección los valores de desplazamiento y de fuerza se relacionan de la siguiente manera:



$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_2 \\
 u_1 &= u_2
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

que significa que la fuerza incidente y su correspondiente desplazamiento en la primera sección es igual en la frontera para la siguiente sección en sus valores.

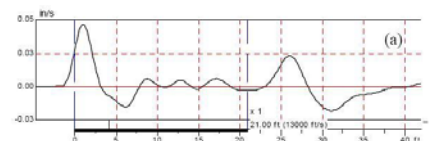
### 4.3 SOLUCIÓN DE REFLEXIONES Y TRANSMISIONES DE ONDA EN LAS FRONTERAS MEDIANTE ANÁLISIS ESPECTRAL

Una vez es iniciada la onda de esfuerzos en el pilote al ser golpeado por el martillo de la prueba, la onda encontrará obstrucciones (cambios de impedancia) en forma de discontinuidades o fronteras como las anteriormente descritas. Dichas fronteras generan reflexiones y transmisiones de onda como se describió en detalle en el numeral 2.6 del presente documento.

**4.3.1 Reflexión de onda en una punta libre del pilote.** Al analizar la condición de frontera (a) de la figura No.47 para una condición de frontera libre en la punta, se tiene que

$$\begin{aligned}
 F_i &= F_r \\
 -ikEAu_i + -ikEAu_r &= 0 \quad \text{donde, } u_i = A \text{ y } u_r = B, \text{ luego} \\
 EA[-ikA + ikB] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Donde la fuerza incidente  $F_i$  es igual a la fuerza reflejada  $F_r$ , lo cual hace que  $B = A$ , indicando que el pulso de desplazamiento reflejado es el mismo que el incidente. El valor de  $A$  es el obtenido al analizar la propagación de una sola onda viajando mediante la expresión (4.11).



**4.3.2 Reflexión de onda en una punta restringida por una frontera elástica.** Si se asume que en la punta del pilote existe un resorte como frontera, tal y como se indica en la figura 48 para el caso (b), en forma espectral se debería cumplir en dicho punto que

$$\begin{aligned}
 F(t) &= -Ku(x,t) \\
 EA[-ikA + ikB] &= -K[A + B] \\
 B &= \frac{ikEA - K}{ikEA + K} A
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

El comportamiento para este caso particular se puede analizar considerando los límites de valores para la constante de rigidez del resorte  $K$ .

Cuando  $K = 0$  en la ecuación (4.16) se tendría que

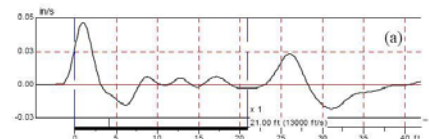
$$B = A, \quad u_r = u_i, \quad \sigma_r = -\sigma_i \tag{4.17}$$

Lo cual daría como resultado una condición de frontera libre como la descrita en el numeral anterior y que muestra como la onda inicial de compresión se refleja con signo contrario o de tensión. Dicho fenómeno se observa en los resultados de la prueba PIT ante un cambio de sección de menor a mayor área y en la punta del pilote cuando no se encuentra apoyado sobre ningún tipo de suelo.

Por otro lado, cuando  $K = \infty$  en la ecuación (4.16) se tendría que

$$B = -A, \quad u_r = -u_i, \quad \sigma_r = \sigma_i \tag{4.18}$$

indicando que la punta del pilote se encuentra limitada por algún tipo de suelo o roca muy rígida y que los esfuerzos reflejados mantendrán el mismo signo que el esfuerzo incidente, pero en cambio el desplazamiento si se invertirá en dicho punto. En los resultados de la prueba PIT ante un cambio de sección de mayor a menor área y en la punta del pilote



cuando se encuentra apoyado sobre algún tipo de suelo o roca, se pueden observar dichos efectos.

**4.3.3 Reflexión y transmisión de onda ante un cambio de impedancia.** Como ya se ha mencionado en diferentes ocasiones, cualquier cambio en la sección transversal del pilote o en las propiedades del material producen nuevas ondas. Aunque el fenómeno puede llegar a ser complejo, para el análisis espectral unidimensional se considera únicamente una onda incidente  $A_1$ , una onda reflejada  $B_1$  y una onda transmitida  $A_2$ . Por tanto para dos secciones del pilote con valores de impedancia diferentes, el valor del desplazamiento respectivo sería

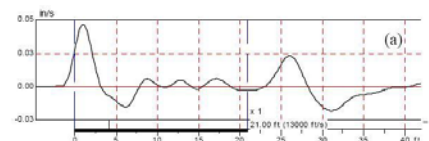
$$\begin{aligned}
 \hat{u}_1 &= A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \\
 \hat{u}_2 &= A_2 e^{-ik_2 x}
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

El análisis para dicho fenómeno se lleva a cabo considerando continuidad de fuerza y desplazamiento en la discontinuidad o cambio de impedancia como se explicó en el numeral 4.2.4.

Para el caso de transmisión de ondas de una sección a otra se realiza un balance de fuerzas y desplazamientos para plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 E_1 A_1 [-A_1 + B_1] ik_1 &= E_2 A_2 [-A_2] ik_2 \\
 A_1 + B_1 &= A_2
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

que al resolver para los coeficientes de la onda reflejada  $B_1$  y la onda transmitida  $A_2$ , según el procedimiento realizado por DOYLE, 1989, se obtendría que:





$$B_1 = \left( \frac{1 - \sqrt{r_s r_d}}{1 + \sqrt{r_s r_d}} \right) A_1, \quad A_2 = \left( \frac{2}{1 + \sqrt{r_s r_d}} \right) A_1 \quad (4.21)$$

donde,

$$r_s = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}, \quad r_d = \frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1} \quad (4.22)$$

La solución para los coeficientes de la onda reflejada  $B_1$  y la onda transmitida  $A_2$  descrita en la ecuación (4.21), coincide con la obtenida en las expresiones (2.92) y (2.93) respectivamente, y pueden ser rescritas de manera abreviada de la siguiente manera

$$B_1 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} A_1 \quad (4.23)$$

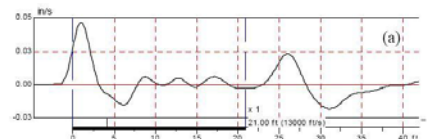
$$A_2 = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} A_1 \quad (4.24)$$

Donde la impedancia  $Z$  esta definida mediante la ecuación  $Z = A\sqrt{\rho E} = \frac{EA}{c}$  para la respectiva sección del pilote.

Al detallar las condiciones para el comportamiento de la reflexión y transmisión de ondas, cuando el valor de  $Z_2$  de la ecuación toma un valor  $Z_2 = Z_1$ , en el caso de la no existencia de un cambio de impedancia se observa que

$$\begin{aligned} B_1 &= 0 \\ A_2 &= A_1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

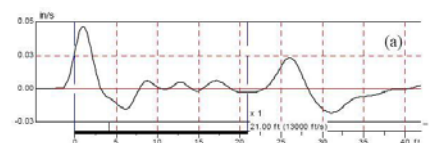
y por tanto no existirá una reflexión de la onda, más si una transmisión de la misma magnitud que la onda incidente.



Por otro lado, cuando  $Z_2 = 0$ , en el caso de la no existencia de una segunda sección, sucede que

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ A_2 &= 2A_1 \end{aligned} \tag{4.26}$$

indicando que se reflejaría una onda de la misma magnitud de la onda incidida y se transmitiría una onda en el aire de dos veces la magnitud de la onda incidente. Más adelante, en el numeral 6.4, se pueden observar las simulaciones para diferentes casos y entender mejor las anteriores soluciones.



## 5. PROPAGACIÓN DE ONDAS Y SIMULACIÓN DE LA PRUEBA PIT MEDIANTE EL PROGRAMA PITGRAPH PARA MATLAB

La aplicación de una solución analítica a través de la metodología espectral para analizar el fenómeno de propagación de ondas en pilotes, es posible de manera práctica utilizando herramientas de programación computacional que permitan visualizar gráficamente los resultados.

Para el desarrollo de un programa que resolviera la ecuación de onda en una dimensión aplicada a las condiciones de los pilotes, se utilizó el paquete MATLAB por sus múltiples funciones matemáticas incorporadas y facilidad de programación.

A continuación se describirá en detalle el programa PITGRAPH compuesto por su código fuente en la función PITGRAPH.m y su respectiva interfaz gráfica PITGRAPH.fig que sirve para cambiar los diferentes parámetros de entrada que el usuario desee procesar.

### 5.1 DESCRIPCIÓN DE LA INTERFAZ GRÁFICA "PITGRAPH.fig"

Para realizar diferentes tipos de análisis al fenómeno de propagación de ondas en pilotes y diferentes tipos de simulaciones para la prueba PIT, se desarrolló una interfaz gráfica mediante la opción de MATLAB denominada como GUIDE (Graphical User Interface Development Environment).

La opción GUIDE permite desarrollar interfaces gráficas que facilitan el ingreso de datos, desarrollo del código y muestra de resultados por pantalla con un diseño amigable y sencillo.

A continuación se muestra la interfaz PITGRAPH.fig desarrollada para el código fuente que se detallará más adelante.

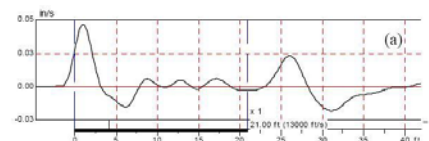
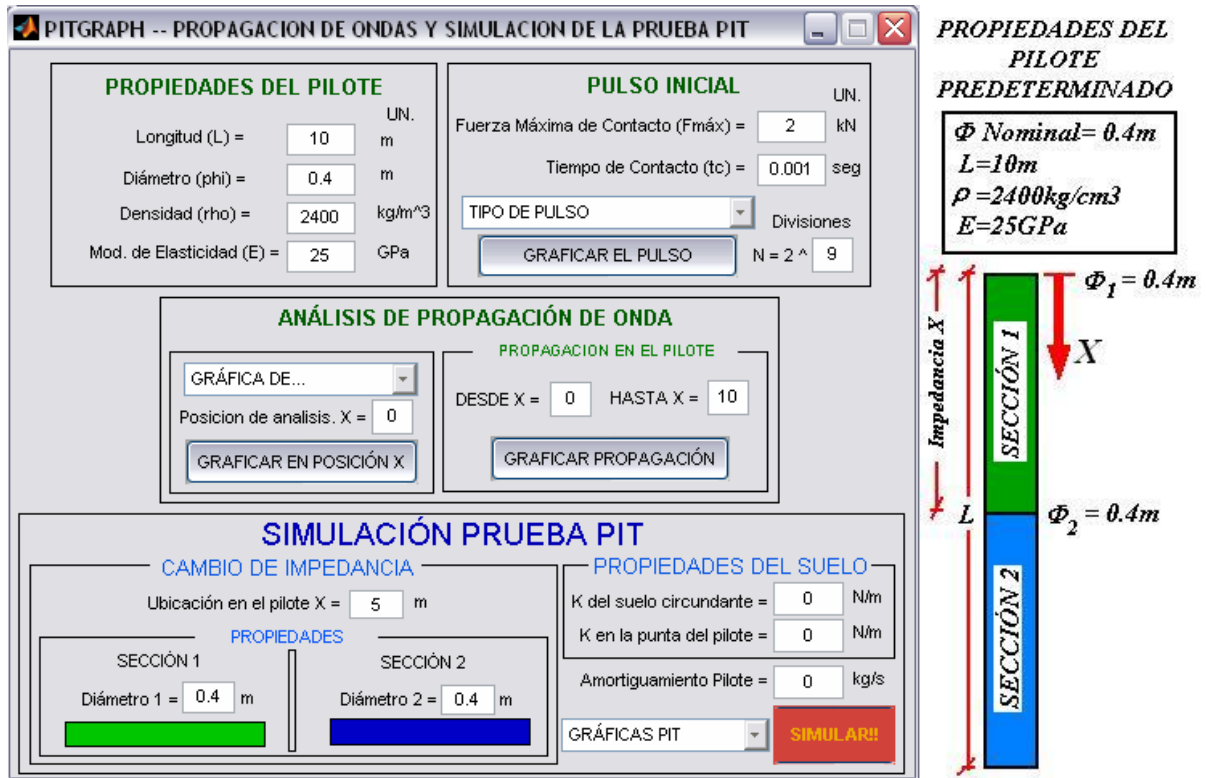


Figura 49 Interfaz gráfica del programa PITGRAPH y valores del pilote predeterminado



**PROPIEDADES DEL PILOTE**

Longitud (L) = 10 m UN. m  
 Diámetro (phi) = 0.4 m UN. m  
 Densidad (rho) = 2400 kg/m<sup>3</sup>  
 Mod. de Elasticidad (E) = 25 GPa

**PULSO INICIAL**

Fuerza Máxima de Contacto (F<sub>máx</sub>) = 2 kN UN. kN  
 Tiempo de Contacto (tc) = 0.001 seg  
 TIPO DE PULSO [dropdown]  
 Divisiones N = 2 ^ 9  
 [GRAFICAR EL PULSO]

**ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE ONDA**

GRÁFICA DE... [dropdown]  
 Posición de analisis. X = 0  
 [GRAFICAR EN POSICIÓN X]

PROPAGACIÓN EN EL PILOTE  
 DESDE X = 0 HASTA X = 10  
 [GRAFICAR PROPAGACIÓN]

**SIMULACIÓN PRUEBA PIT**

CAMBIO DE IMPEDANCIA  
 Ubicación en el pilote X = 5 m

PROPIEDADES DEL SUELO  
 K del suelo circundante = 0 N/m  
 K en la punta del pilote = 0 N/m  
 Amortiguamiento Pilote = 0 kg/s  
 [SIMULAR!!]

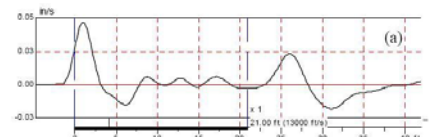
**PROPIEDADES DEL PILOTE PREDETERMINADO**

Φ Nominal = 0.4m  
 L = 10m  
 ρ = 2400kg/cm<sup>3</sup>  
 E = 25GPa

Diagrama: SECCIÓN 1 (Φ<sub>1</sub> = 0.4m), SECCIÓN 2 (Φ<sub>2</sub> = 0.4m), Impedancia X, L, X

5.1.1 Datos de entrada para generar el pulso inicial sobre la cabeza del pilote. En el cuadro donde se hace referencia a las PROPIEDADES DEL PILOTE se ingresan como datos de entrada los siguientes parámetros:

- **Longitud (L):** Longitud total del pilote a analizar en metros. Por defecto el valor de análisis es de 10 m.
- **Diámetro (phi):** Diámetro nominal del pilote en metros. Por defecto el valor del diámetro es de 0.4m
- **Densidad (rho):** Densidad del material a analizar en kg/m<sup>3</sup>. Por defecto el valor corresponde a la densidad del concreto de aproximadamente 2400 kg/m<sup>3</sup>
- **Mód de Elasticidad (E):** Módulo de elasticidad del material en GPa. Por defecto el valor del módulo de elasticidad del concreto es de 25GPa aproximadamente. Para



comparar la simulación PIT con resultados reales, es necesario obtener el módulo de elasticidad aproximado del pilote ensayado mediante la siguiente expresión:

$$E_{pilote} = c_{PIT}^2 \times \rho \quad (5.1)$$

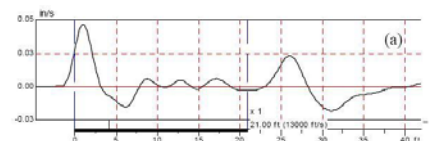
En donde,  $c_{PIT}$  es la velocidad de onda en el concreto obtenida mediante la prueba PIT del pilote a analizar y  $\rho$  es la densidad del concreto de aproximadamente 2400kg/m<sup>3</sup>.

El siguiente cuadro del programa hace referencia a los parámetros de entrada del PULSO INICIAL, donde se ingresan:

- **Fuerza Máxima de Contacto (Fmáx):** Correspondiente a la fuerza pico que se puede alcanzar con el martillo al impactar la cabeza del pilote durante el tiempo de contacto. Está dada en kN y por defecto tiene un valor de 2kN. El valor de la fuerza máxima de contacto se obtiene iterativamente comparando con resultados reales la velocidad máxima alcanzada por el pulso de entrada al realizar la simulación PIT para el pilote total.
- **Tiempo de contacto (tc):** Es el tiempo en segundos que dura el martillo realizando el impacto en la cabeza del pilote. Por defecto tiene un valor de 0.001 seg o 1ms y se debe comparar con los datos reales en donde el valor de la duración del pulso está dado en longitud. Para convertir dicho valor a tiempo se realiza la operación:

$$t_c = \frac{L_{pulso}}{c_{PIT}} \quad (5.2)$$

en donde  $L_{pulso}$  es la longitud del pulso inicial tomada de los resultados arrojados por la prueba PIT y  $c_{PIT}$  es la velocidad de onda en el concreto obtenida igualmente mediante la prueba PIT para el pilote a analizar



- **Divisiones  $N = 2^A$ :** Ingresa el exponente para calcular el valor de N divisiones del pulso de entrada. Por defecto tiene un valor de 9 para un total de divisiones del pulso inicial de  $N=512$ .

- 

Despliega las siguientes opciones:



1. **Fuerza Instantánea:** Genera un pulso donde la fuerza máxima se da en un único punto y a la mitad del tiempo de contacto.
2. **Triangular:** Genera un pulso de tipo triangular, en donde la fuerza crece de manera constante hasta alcanzar el valor de la fuerza máxima en la mitad del tiempo de contacto del martillo sobre la cabeza del pilote.
3. **Rectangular:** Genera un pulso de tipo rectangular, donde el valor de la fuerza máxima es constante en todo el tiempo de contacto.
4. **Medio Seno:** Genera el tipo de pulso "Half Sine Pulse" que se asemeja al generado por la prueba PIT mediante la expresión de la fórmula (4.8) como se detalla en el numeral 4.2.2.

**5.1.2 Generación de la gráfica del pulso seleccionado.** Para generar la gráfica de los diferentes tipos de pulsos descritos anteriormente se presiona sobre el botón



y a continuación aparecerá la gráfica del pulso seleccionado en el dominio del tiempo hasta un tiempo igual a dos veces lo que demora la onda en llegar hasta la punta (Tiempo de análisis =  $2L/c$ ).

En caso de no realizar una selección del tipo de pulso a generar, o ingresar algún parámetro como cadena de caracteres, el programa desplegará los siguientes mensajes de error:

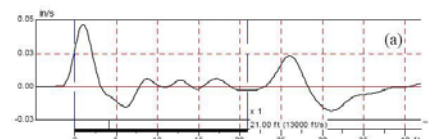
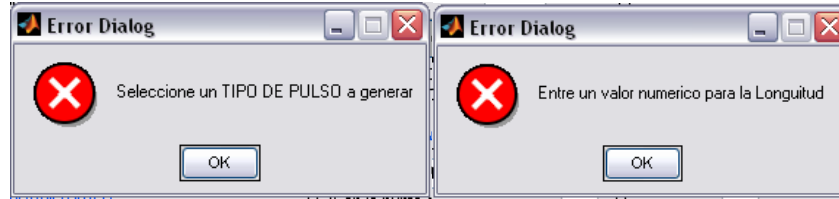


Figura 50 Posibles mensajes de error al graficar el pulso.



Los siguientes son los tipos de pulsos generados para las condiciones predeterminadas del programa:

Figura 51 Pulso predeterminado para Fuerza Instantánea

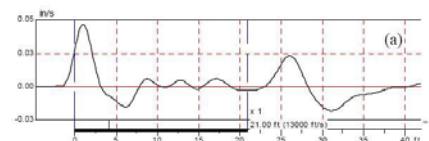
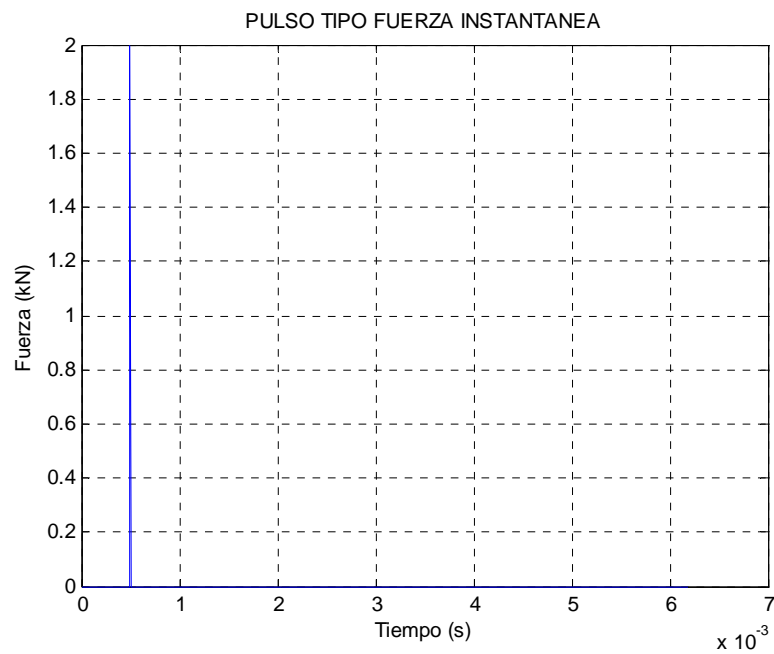


Figura 52 Pulso predeterminado para el tipo Triangular

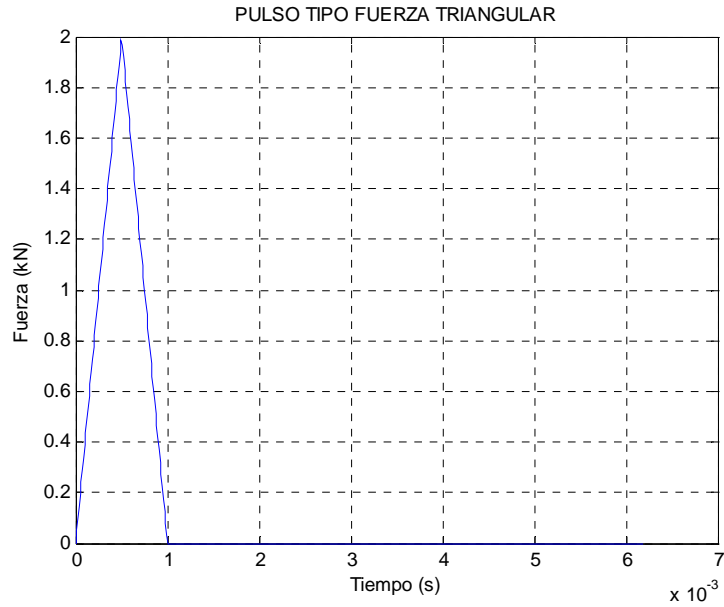


Figura 53 Pulso predeterminado para el tipo Rectangular

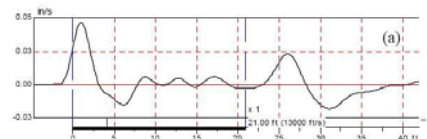
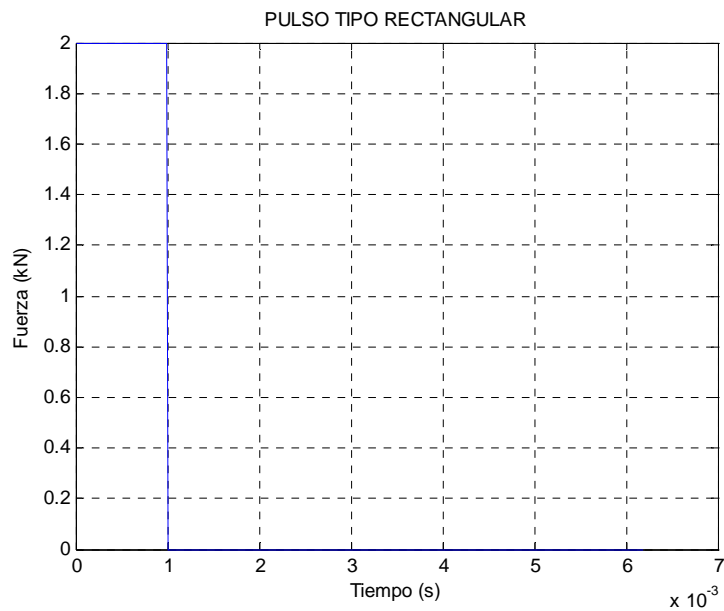
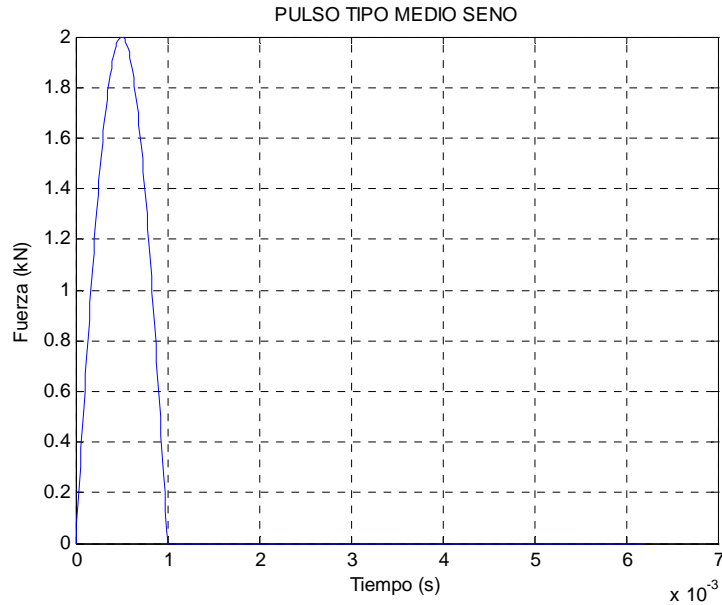
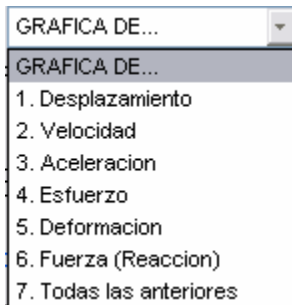




Figura 54 Pulso predeterminado para tipo Medio Seno



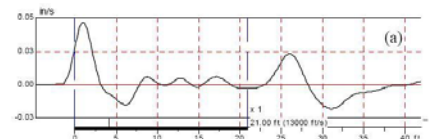
**5.1.3 Datos de entrada para realizar el análisis de propagación de onda.** En el cuadro intermedio de la interfaz gráfica se pide seleccionar el tipo de gráfica a analizar por medio del menú:  que despliega las siguientes opciones:



1. **Desplazamiento:** Soluciona la ecuación de propagación unidimensional de onda para una onda viajando a la derecha de acuerdo a la expresión (4.12) en la posición X ingresada por el usuario. La gráfica que se muestra como resultado tiene el tiempo en segundos y el desplazamiento en metros como se muestra en la figura 56 para el caso

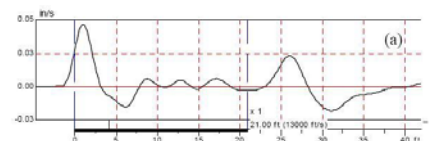
predeterminado.

2. **Velocidad:** Soluciona la ecuación de propagación unidimensional de onda teniendo en cuenta la solución para el desplazamiento, y calcula la velocidad mediante la expresión  $\dot{u}_i = i\omega u_i$  (Ver Tabla 6) en la posición X ingresada por el usuario.



La gráfica que se muestra como resultado tiene el tiempo en segundos y la velocidad en m/s como se muestra en la figura 57

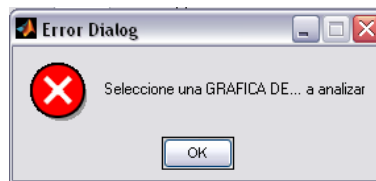
3. **Aceleración:** Soluciona la ecuación de propagación unidimensional de onda teniendo en cuenta la solución para el desplazamiento, y calcula la aceleración mediante la expresión  $\ddot{u}_i = i^2 \omega^2 u_i$  (Ver Tabla 6) en la posición X ingresada por el usuario. La gráfica que se muestra como resultado tiene el tiempo en segundos y la aceleración en valores de gravedad en G's como se muestra en la figura 58.
  4. **Esfuerzo:** Soluciona la ecuación de propagación unidimensional de onda teniendo en cuenta la solución para el desplazamiento, y calcula el esfuerzo mediante la expresión  $\sigma_i = -ikEu_i$  (Ver Tabla 6) en la posición X ingresada por el usuario. La gráfica que se muestra como resultado tiene el tiempo en segundos y el esfuerzo en kPa como se detalla en la figura 59.
  5. **Deformación:** Soluciona la ecuación de propagación unidimensional de onda teniendo en cuenta la solución para el desplazamiento, y calcula la deformación mediante la expresión  $e_i = -iku_i$  (Ver Tabla 6) en la posición X ingresada por el usuario. La gráfica que se muestra como resultado tiene el tiempo en segundos y la deformación en porcentaje (%) como se detalla en la figura 60.
  6. **Fuerza:** Soluciona la ecuación de propagación unidimensional de onda teniendo en cuenta la solución para el desplazamiento, y calcula la fuerza de reacción mediante la expresión  $F_i = -ikEAu_i$  (Ver Tabla 6) en la posición X ingresada por el usuario. La gráfica que se muestra como resultado tiene el tiempo en segundos y la fuerza de reacción en kN como se detalla en la figura 61.
  7. **Todas las anteriores:** Esta opción realiza en una sola gráfica todos los anteriores cálculos con sus respectivas unidades en la posición X ingresada por el usuario como se muestra en la figura 62.
- **Posición de análisis X=:** En esta casilla se ingresa la posición con respecto a la superficie del suelo (X=0) con la posibilidad de analizar valores de posición X hasta 2 veces la longitud del pilote (X=2L).



**5.1.4 Generación de la gráfica de la propiedad mecánica seleccionada evaluada en la posición X.**

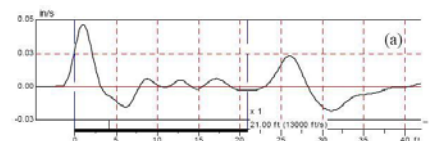
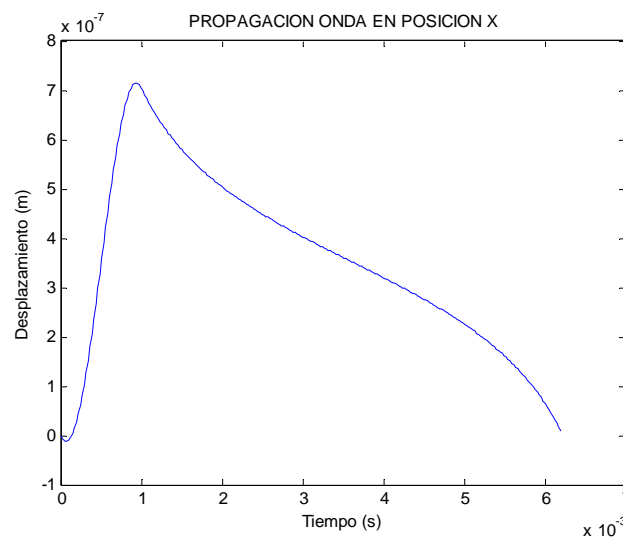
Para obtener la gráfica de alguna de las opciones anteriores en la posición X deseada, se presiona sobre el botón **GRAFICAR EN POSICION X** y a continuación aparecerá la gráfica respectiva. En caso de no realizar una selección de un tipo de gráfica, el programa desplegará el siguiente mensaje de error:

*Figura 55 Mensaje de error al graficar la solución en alguna posición X*

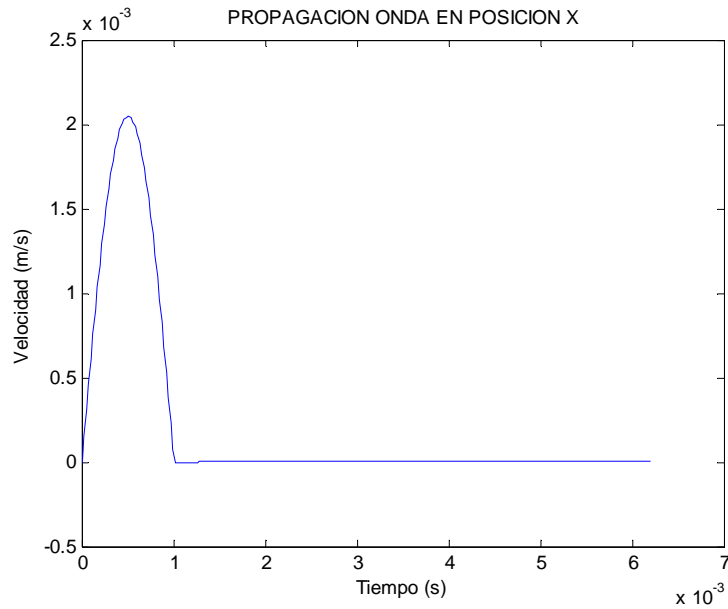


A continuación se presentan las gráficas que se obtienen para cada una de las opciones disponibles. Los cálculos se hacen para la posición  $X=0$  (Desde la superficie del suelo en la cabeza del pilote) con los parámetros de entrada predeterminados, seleccionando como pulso de entrada el tipo: 4. Medio Seno. Cabe anotar que se pueden realizar gráficas para los diferentes tipos de pulso en cualquier posición para su análisis.

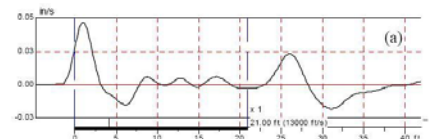
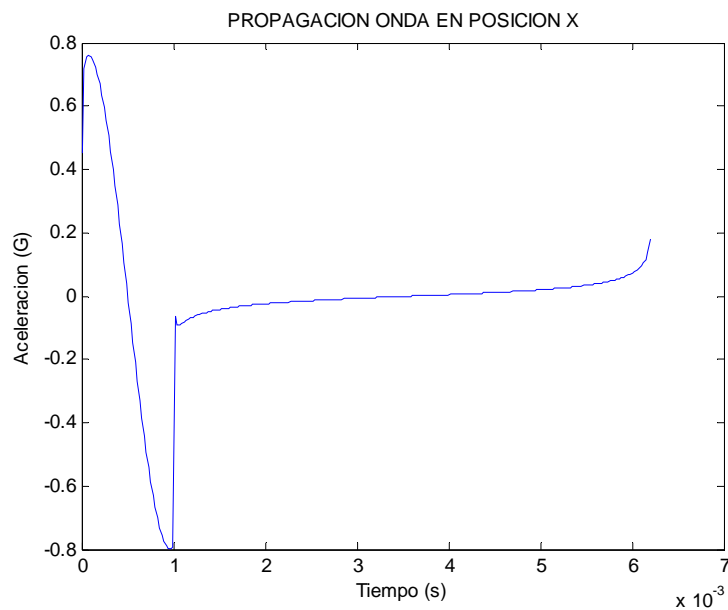
*Figura 56 Solución de la ecuación de onda para el desplazamiento en  $X=0$ . Onda que viaja a la derecha.*



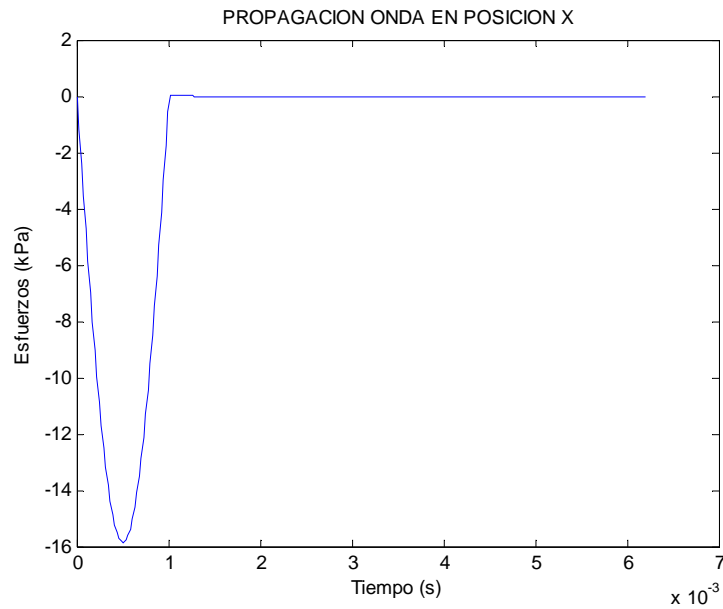
*Figura 57 Solución de la ecuación de onda para la velocidad en  $X=0$ . Onda que viaja a la derecha.*



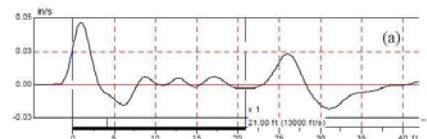
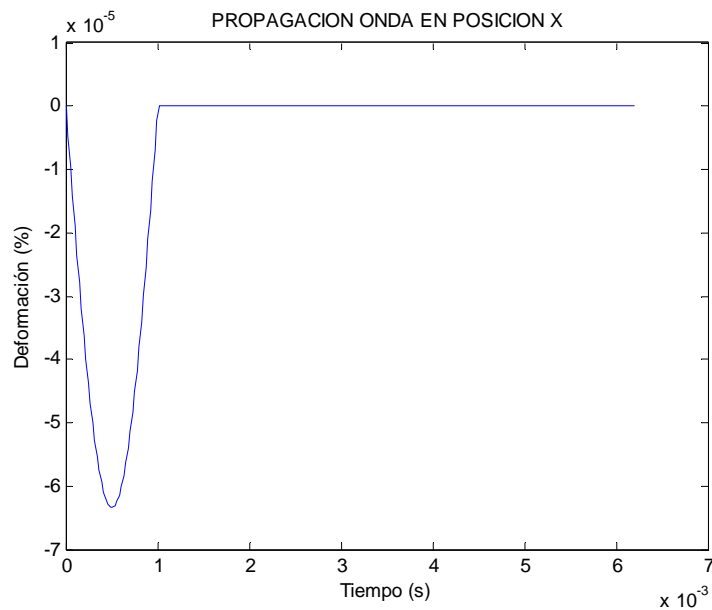
*Figura 58 Solución de la ecuación de onda para aceleración en  $X=0$ . Onda que viaja a la derecha.*



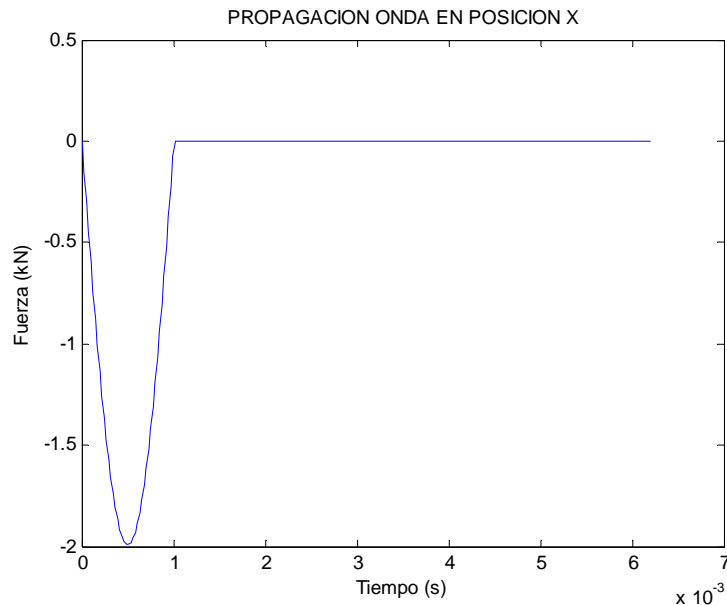
*Figura 59 Solución de la ecuación de onda para el esfuerzo en  $X=0$ . Onda que viaja a la derecha.*



*Figura 60 Solución de la ecuación de onda para la deformación en  $X=0$ . Onda que viaja a la derecha.*



*Figura 61 Solución de la ecuación de onda para la fuerza de reacción en  $X=0$ . Onda que viaja a la derecha.*



### 5.1.5 Datos de entrada y generación de la gráfica de propagación de onda en diferentes posiciones.

Para generar la gráfica de propagación del pulso de entrada en el pilote en un rango de  $X$  de profundidades, el usuario ingresa en las casillas

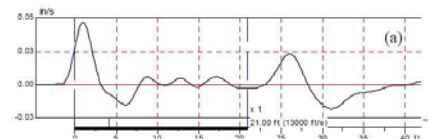
DESDE  $X =$   HASTA  $X =$

el rango de posiciones a evaluar y al presionar sobre el botón

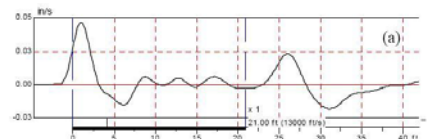
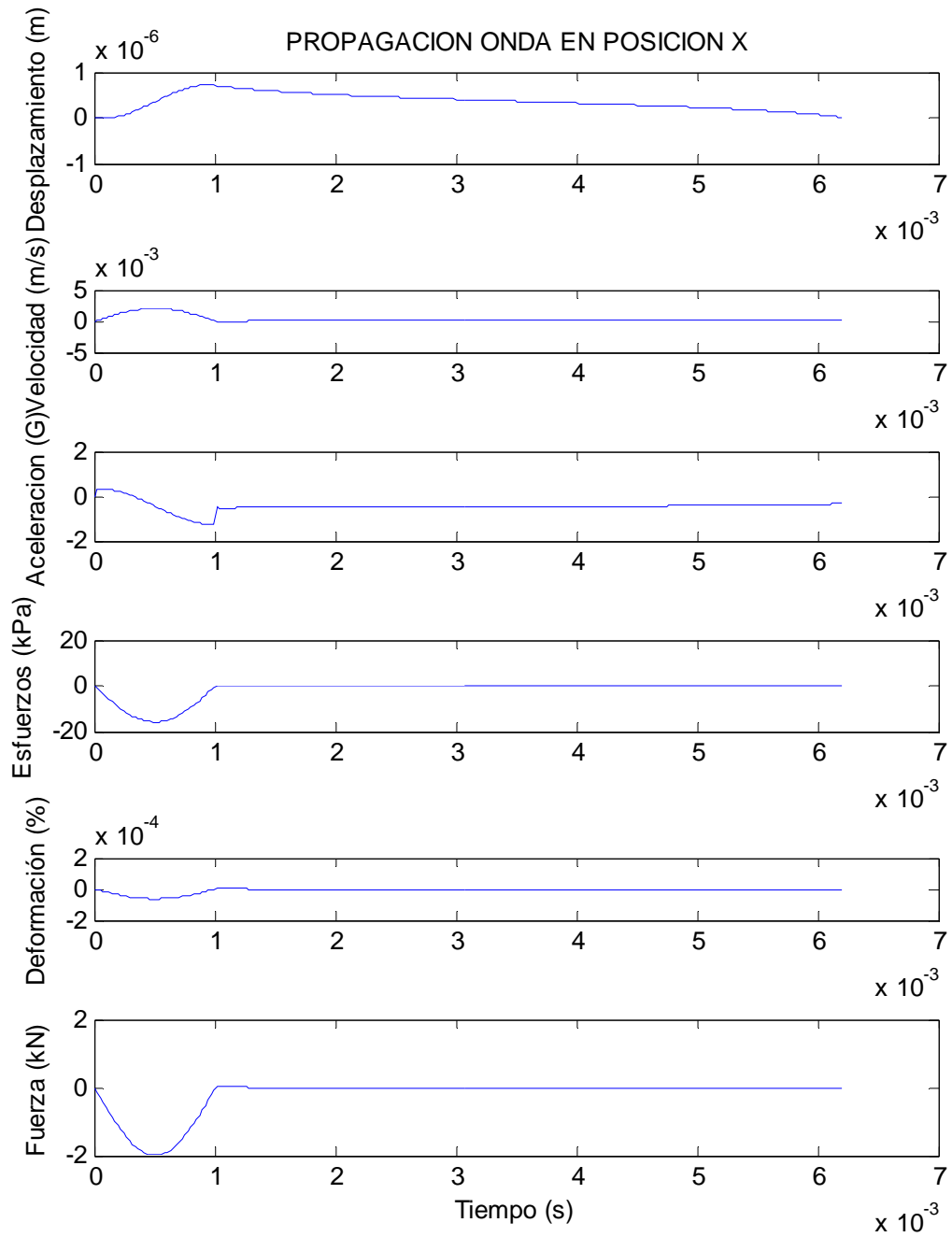
**GRAFICAR PROPAGACION**

el programa ejecutará la solución de la ecuación de onda, evaluando en posiciones diferentes, para el tipo de propiedad mecánica seleccionada y mostrará el proceso en 6 gráficas.

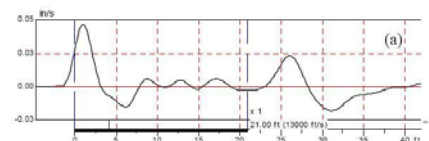
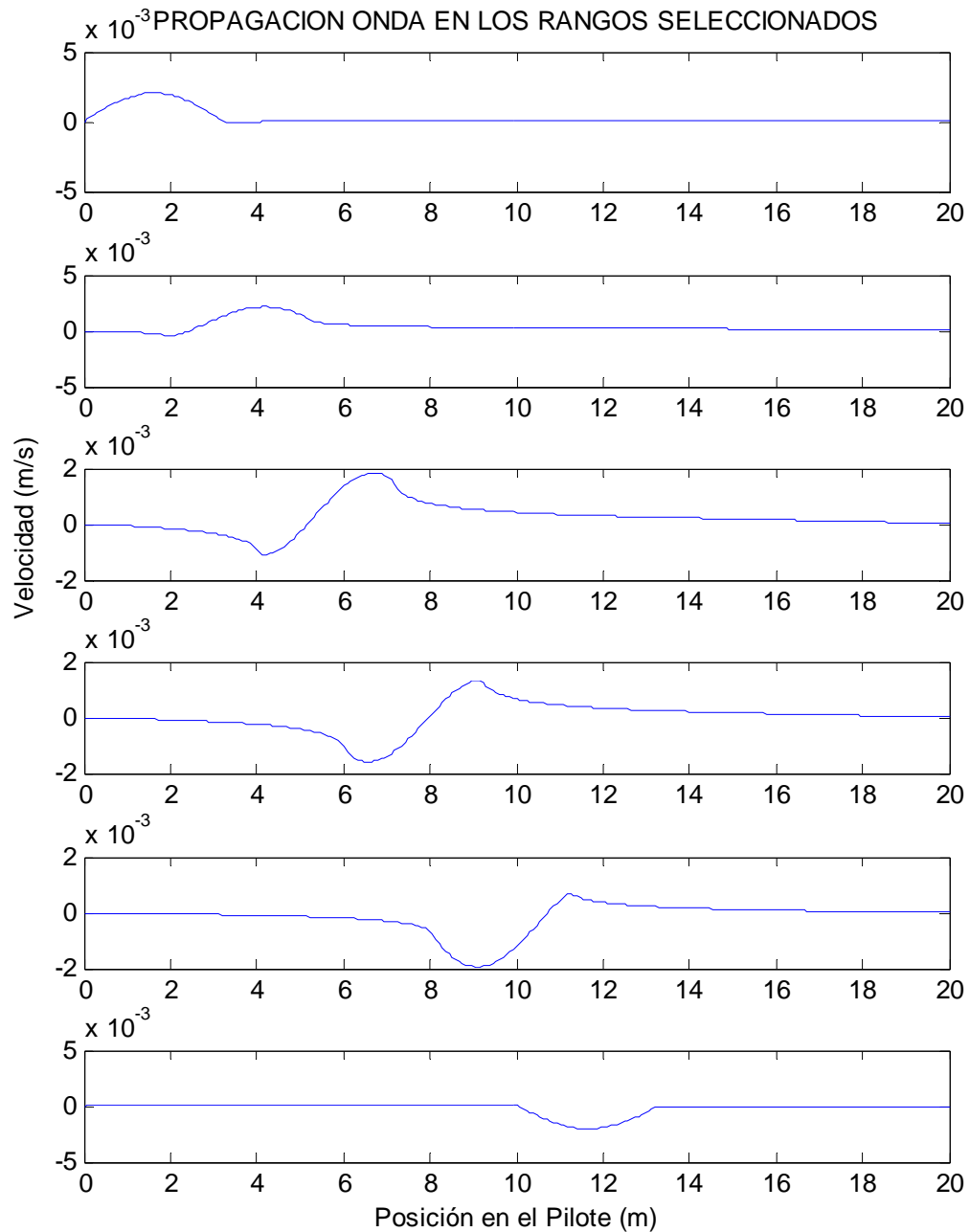
En la figura 63 se muestra la gráfica generada con los parámetros predeterminados que presenta la propagación del pulso inicial hacia la derecha dentro del rango comprendido entre  $X=0$  y  $X=10$ . La gráfica tiene unidades de velocidad en m/s y en el eje horizontal se indica la posición en el pilote desde  $X=0$  hasta dos veces la longitud del pilote  $X=2L$ .



**Figura 62** Solución de la ecuación de onda para todas las propiedades mecánicas en  $X=0$ .  
 Onda que viaja a la derecha.



*Figura 63 Solución de la ecuación de onda para la velocidad evaluada desde  $X=0$  hasta  $X=10$ . Onda que viaja a la derecha.*





**5.1.6 Simulación de la prueba PIT.** En la parte inferior de la interfaz gráfica de la figura 49 se puede apreciar el recuadro que enmarca los parámetros de entrada, menús y botones para generar las gráficas PIT que se desee. A continuación se muestra dicho recuadro:

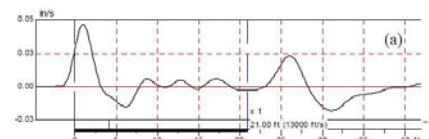
**Figura 64** Recuadro correspondiente a la simulación de la prueba PIT en la interfaz gráfica PITGRAPH.fig



El recuadro tiene los siguientes parámetros a ingresar por parte del usuario para la sección correspondiente al **CAMBIO DE IMPEDANCIA**:

- Ubicación en el pilote X** =: En esta casilla se ingresa la ubicación del cambio de impedancia en el pilote en metros. El rango debe estar comprendido entre  $0 \leq X \leq L$ .
- Diámetro 1 y Diámetro 2**: En estas casillas se ingresan los diámetros de las secciones a analizar en metros. Por defecto ambos valores son iguales.

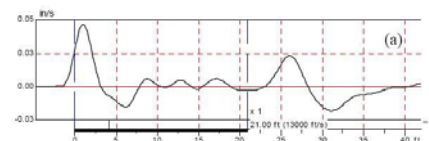
La sección correspondiente a las **PROPIEDADES DEL SUELO** requiere los siguientes parámetros de entrada:



- **K del suelo circundante:** En esta casilla se ingresa el valor de K del tipo de suelo que rodea al pilote teniendo en cuenta las consideraciones y análisis realizados en el numeral 6.3.
- **K de la punta del pilote:** En esta casilla se ingresa el valor del K del tipo de soporte en la punta teniendo en cuenta las consideraciones y análisis realizados en el numeral 6.3.
- **Amortiguamiento:** En esta casilla se ingresa el valor del amortiguamiento generado por el material del pilote teniendo en cuenta las consideraciones y análisis realizados en el numeral numeral 6.3.


En el menú que despliega las distintas **GRAFICAS PIT**, se debe seleccionar alguna de las siguientes opciones:

- **1. Sección 1:** Genera la simulación de la prueba PIT para la primera sección con el diámetro 1 respectivo, teniendo en cuenta el pulso generado y la reflexión ante un determinado cambio de impedancia. La gráfica está dada en unidades de velocidad en la cabeza del pilote en cm/s y unidades de tiempo en milisegundos (ms) como se muestra en la figura 66 para los parámetros de entrada predeterminados.
- **2. Sección 2:** Genera la simulación de la prueba PIT para la segunda sección con el diámetro 2 respectivo, teniendo en cuenta el pulso transmitido de la sección 1 y la reflexión la llegada a la punta del pilote. La gráfica está dada en unidades de velocidad en la cabeza del pilote en cm/s y unidades de tiempo en milisegundos (ms) como se muestra en la figura 67 para los parámetros de entrada predeterminados.
- **3. Secciones 1 y 2:** Genera las anteriores dos gráficas de tal manera que se puedan apreciar en línea y analizar el pulso inicial, la reflexión y transmisión en el cambio de impedancia, al igual que la reflexión en la punta del pilote. Las gráficas están dadas en unidades de velocidad en la cabeza del pilote en cm/s y unidades de tiempo en milisegundos (ms) como se muestra en la figura 68 para los parámetros de entrada predeterminados.



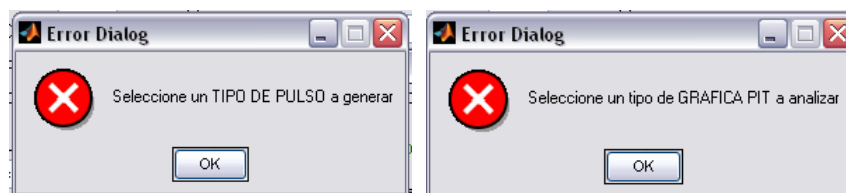
- 4. Secciones 1,2 y pilote total:** Genera las gráficas de las secciones 1 y 2, y presenta el resultado para la longitud total del pilote que es la gráfica a comparar con la prueba de integridad de pilotes. Las gráficas están dadas en unidades de velocidad en la cabeza del pilote en cm/s y unidades de tiempo en milisegundos (ms) como se muestra en la figura 69 para los parámetros de entrada predeterminados.
- 5. Pilote Total:** Genera la gráfica que simula la prueba PIT para un pilote con dos secciones y un cambio de impedancia de acuerdo a los parámetros de entrada y tipo de pulso seleccionado. Esta gráfica se muestra con información para la cabeza del pilote en cm/s y ubicación en el pilote de las reflexiones correspondientes al cambio de impedancia y reflexión en la punta en m. En la figura 70 se muestra la gráfica total generada con los parámetros de entrada predeterminados.

Para poder llevar a cabo los diferentes tipos de simulación anteriormente descritos se

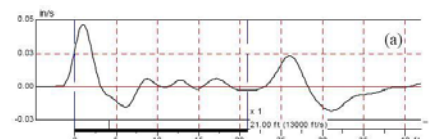
presiona sobre el botón  y a continuación se mostrará la gráfica correspondiente.

En caso de no haberse seleccionado algún TIPO DE PULSO, el programa desplegará el siguiente mensaje de error:

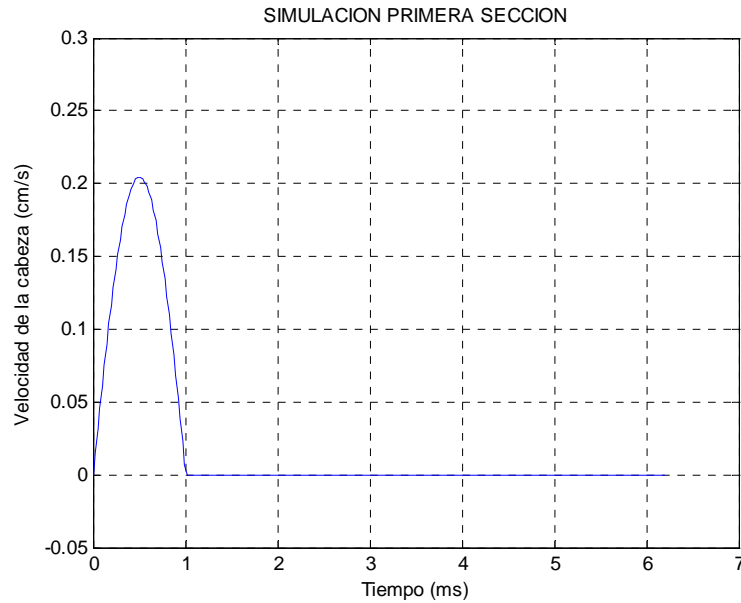
*Figura 65 Posibles mensajes de error al generar la simulación PIT*



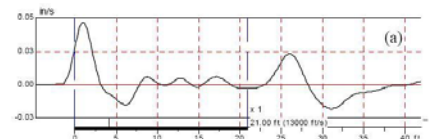
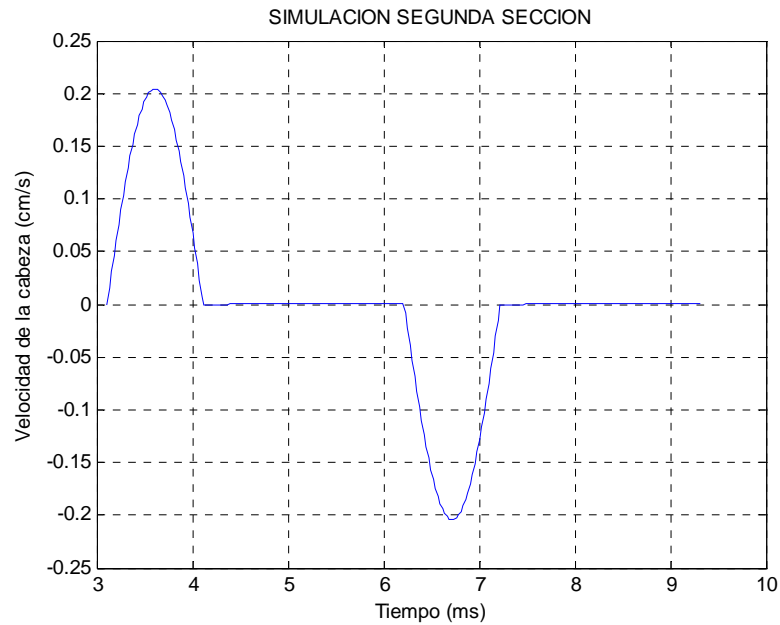
A continuación se muestra las diferentes gráficas que se obtienen para cada una de las opciones, calculadas con los parámetros predeterminados del programa.



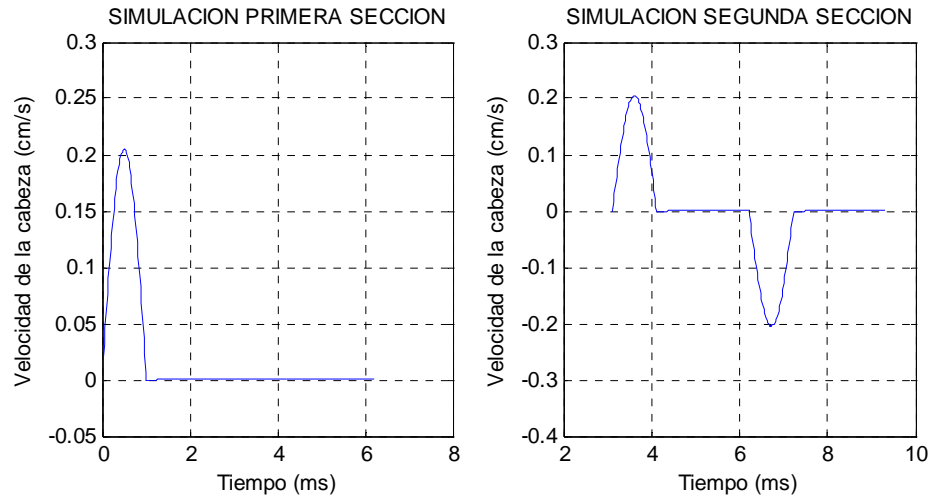
*Figura 66 Simulación predeterminada de la prueba PIT para la primera sección.*



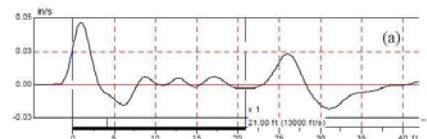
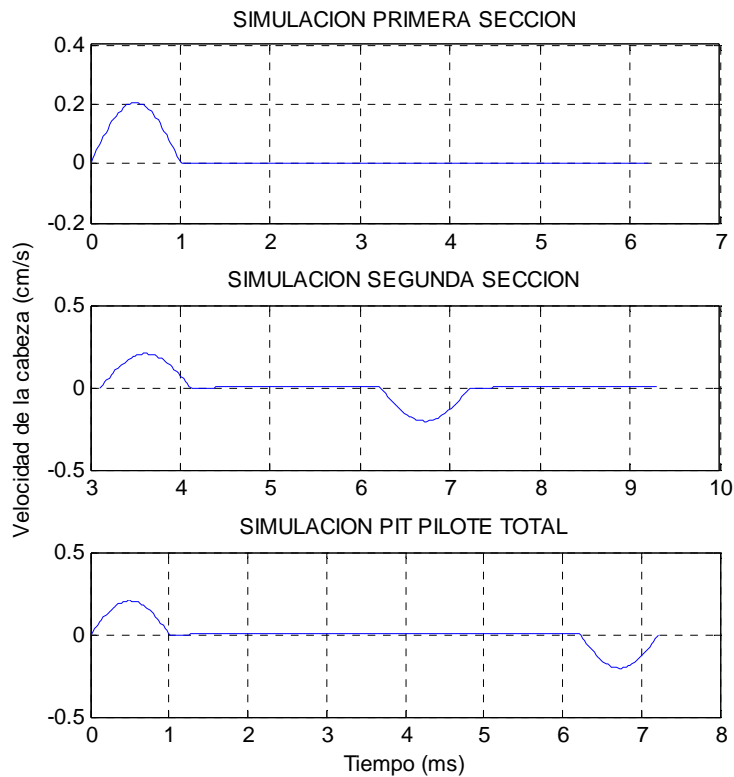
*Figura 67 Simulación predeterminada de la prueba PIT para la segunda sección.*



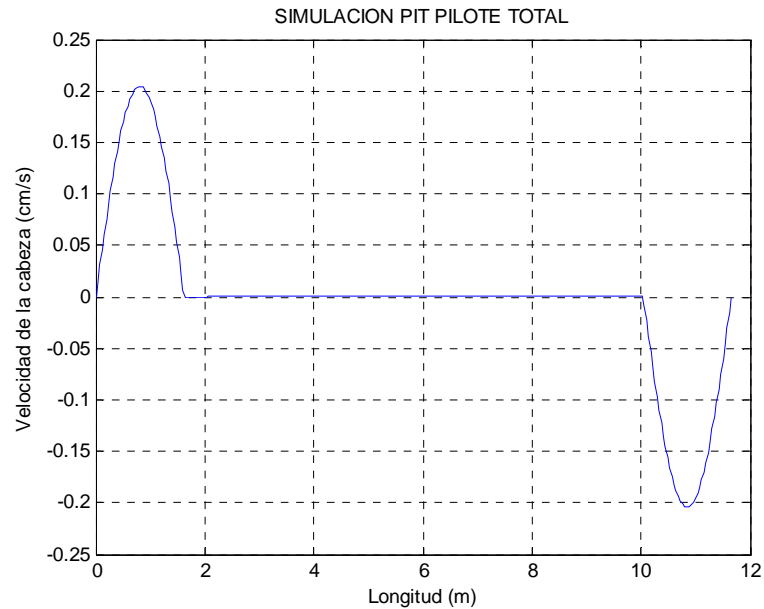
*Figura 68 Simulación predeterminada de la prueba PIT para las secciones 1 y 2.*



*Figura 69 Simulación predeterminada de la prueba PIT para las secciones 1, 2 y pilote total*



*Figura 70 Simulación predeterminada de la prueba PIT para el pilote total.*

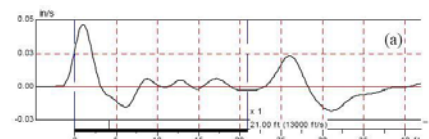


## 5.2 FUNCIÓN "PITGRAPH.m"

Para que la interfaz gráfica pueda usar los parámetros de entrada y la selección de opciones de tal manera que con ellos lleve a cabo los cálculos y muestre los resultados de manera gráfica, se ha definido el código fuente del programa en la función de MATLAB llamada PITGRAPH.m.

La función PITGRAPH.m cuenta con un código fuente básico que es generado automáticamente al crear la interfaz gráfica PITGRAPH.fig en donde se definen funciones diferentes para cada una de las casillas de edición de texto, menús desplegables y botones.

Para cada una de las funciones que definen los anteriores elementos se complementa el código con los requerimientos de cálculo necesarios.



**5.2.1 Diagramas de Flujo de cada uno de los botones de la interfaz gráfica.** Cada vez que se oprime alguno de los botones, el programa ejecuta el código que se encuentra asociado a él. A continuación se describe mediante diagramas de flujo la estructura general del código fuente de los botones que ejecutan operaciones en la interfaz gráfica.

**Figura 71 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR PULSO**

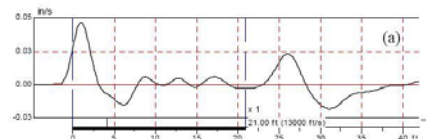
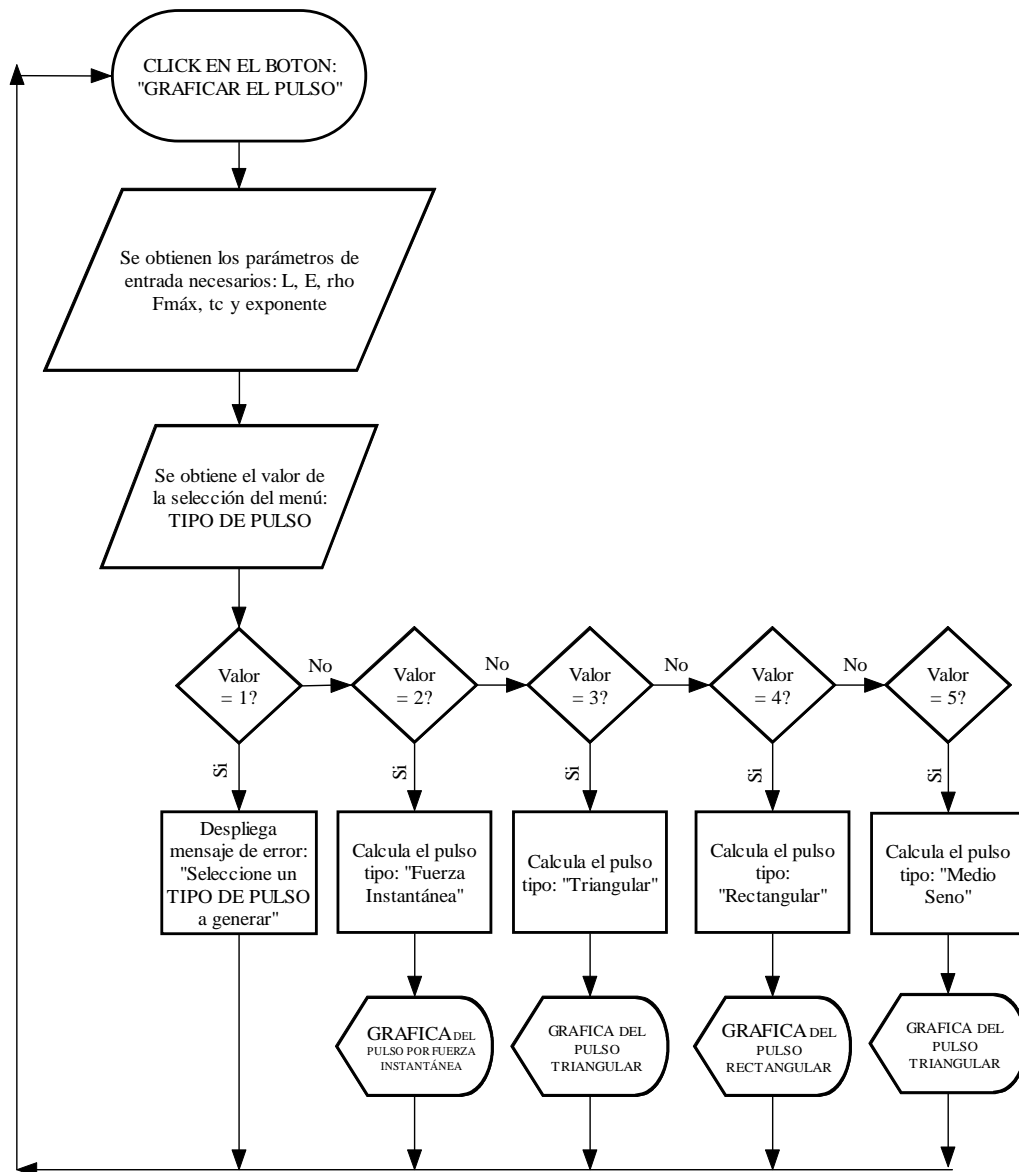


Figura 72 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR EN POSICIÓN X (1 Parte)

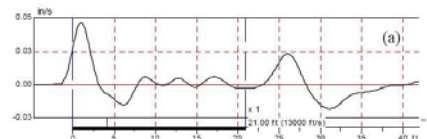
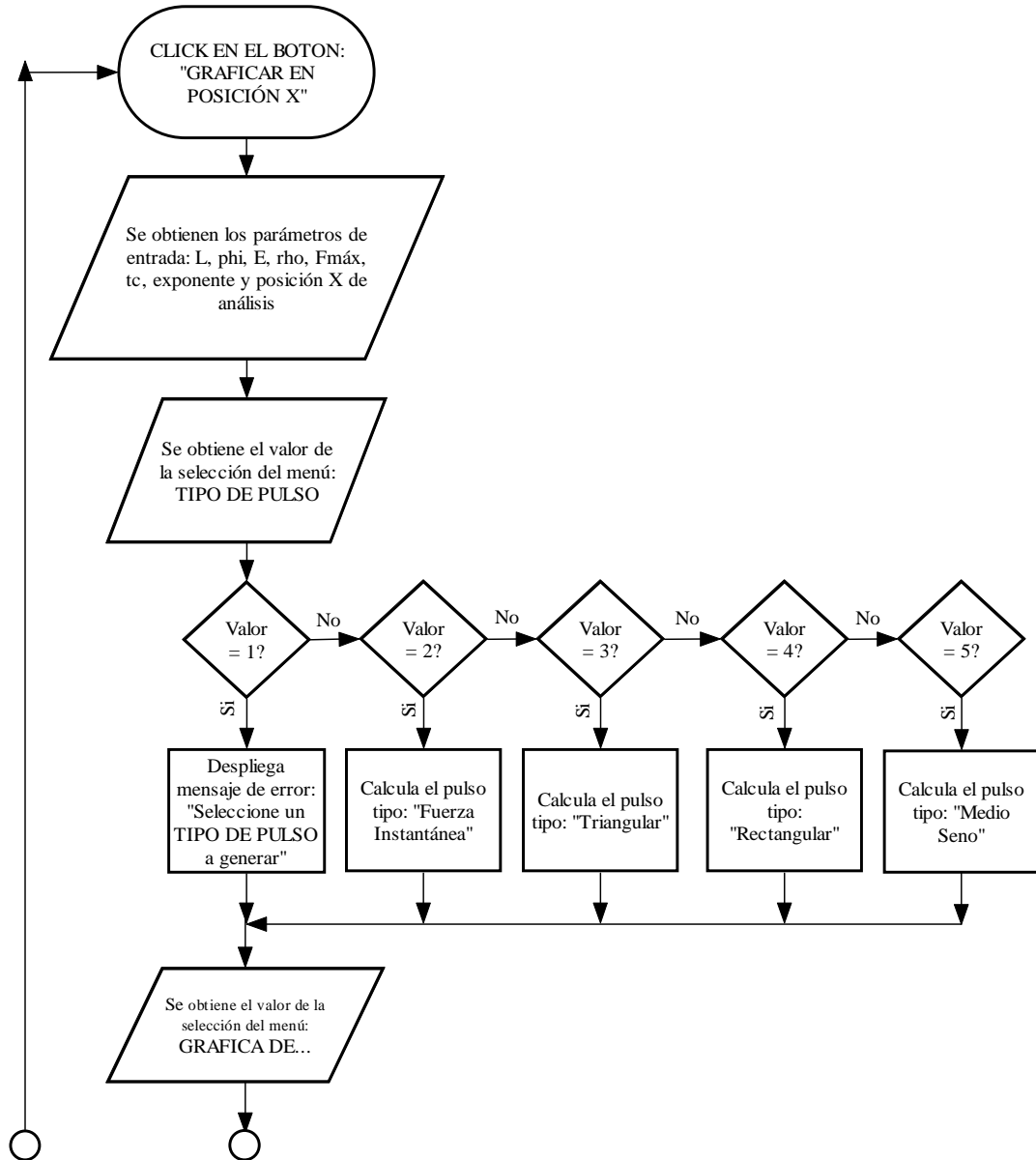




Figura 73 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR EN POSICIÓN X (2 Parte)

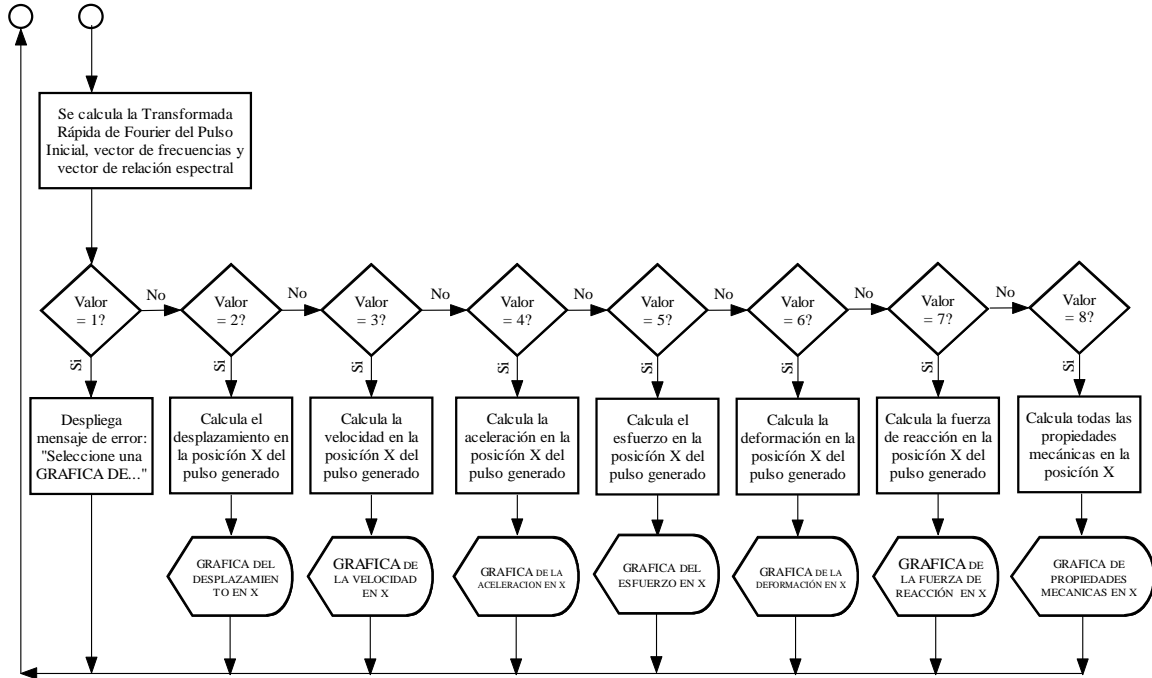


Figura 74 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR PROPAGACIÓN (1 Parte)

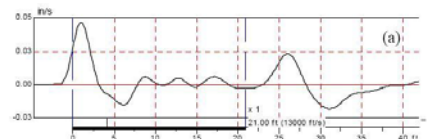
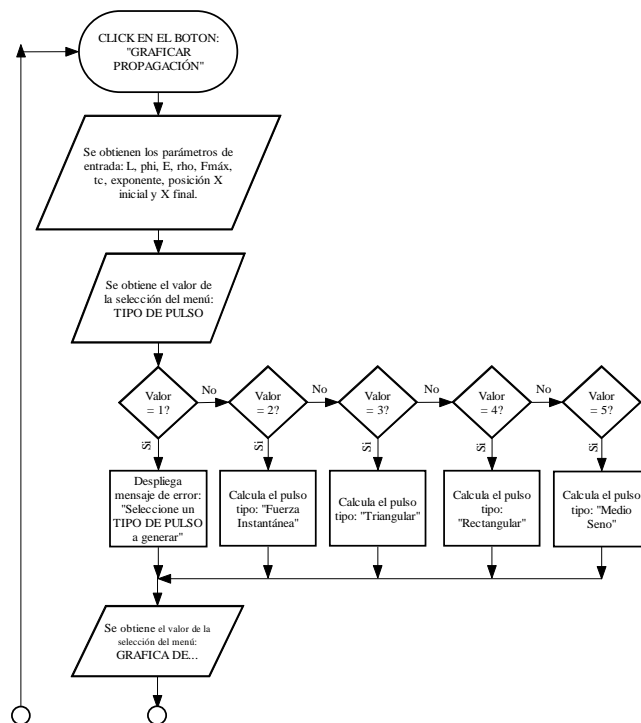


Figura 75 Diagrama de Flujo del botón GRAFICAR PROPAGACIÓN (2 Parte)

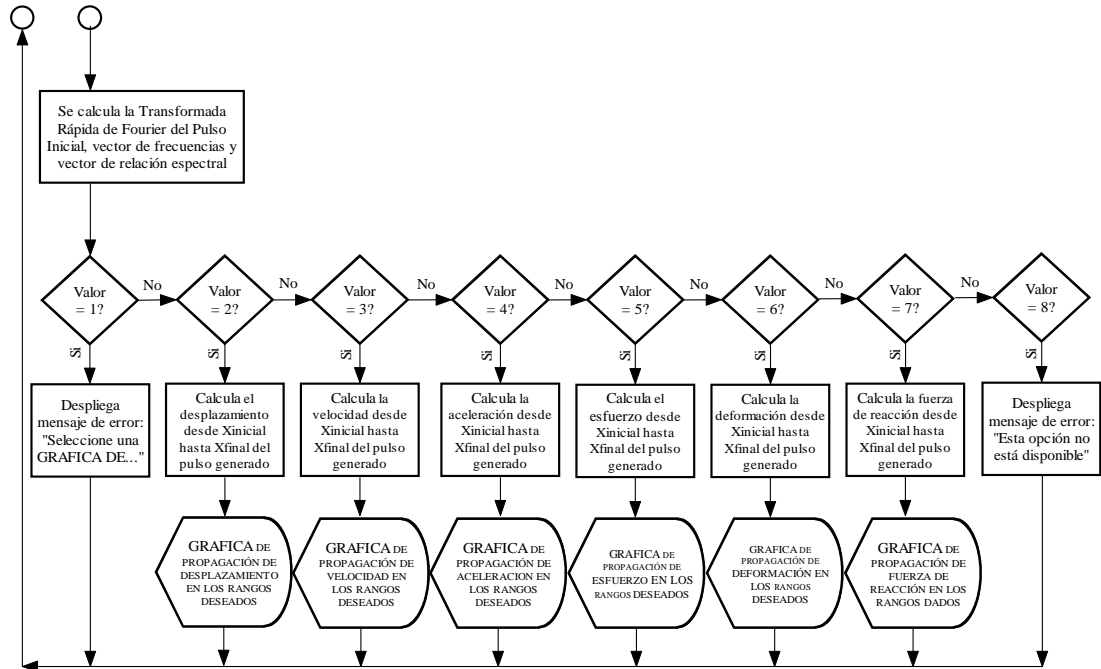


Figura 76 Diagrama de Flujo del botón SIMULAR (1 Parte)

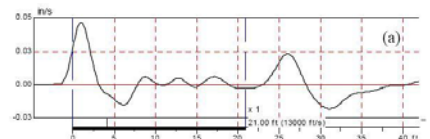
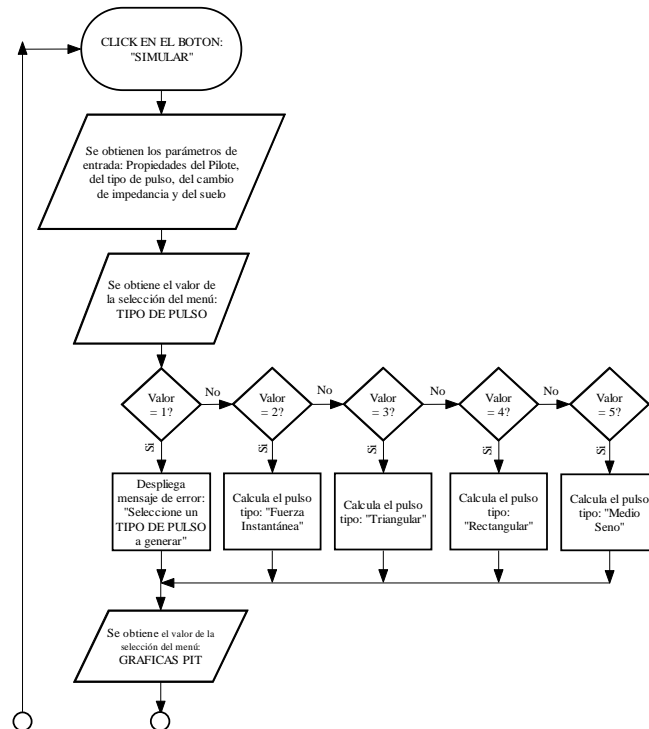
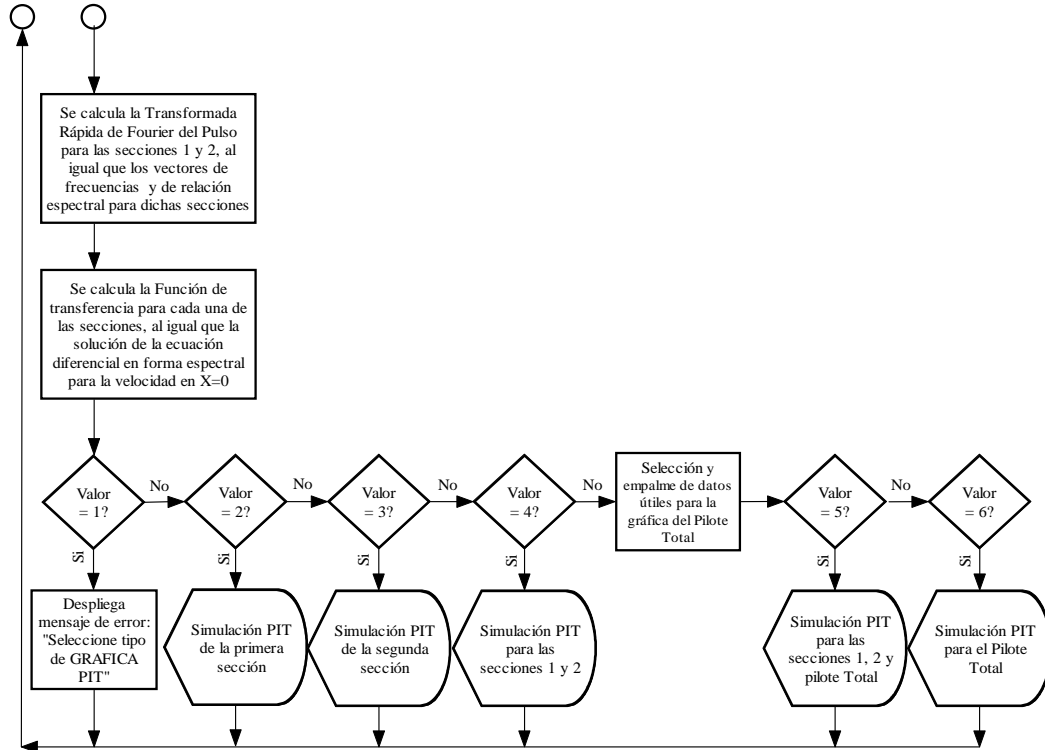
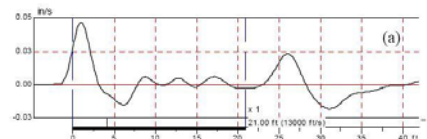


Figura 77 Diagrama de Flujo del botón SIMULAR (2 Parte)



Para detallar el código asociado a cada uno de los botones, en el Anexo 1 se presenta la función PITGRAPH.m con el código fuente completo.



## 6. ANÁLISIS DE SIMULACIONES Y COMPARACIÓN CON PRUEBAS PIT OBTENIDAS EN CAMPO

Por medio de la escogencia de diferentes parámetros de entrada, se pueden analizar los resultados que el programa PITGRAPH alcanza, al seleccionar el tipo de gráfica deseada. A continuación se llevarán a cabo análisis para diferentes escenarios para los que se hará referencia a su respectiva gráfica.

### 6.1 ANÁLISIS DE LOS DIFERENTES PULSOS INICIALES

El programa PITGRAPH permite seleccionar los siguientes pulsos desde el menú desplegable TIPO DE PULSO:

- 1. Fuerza Instantánea
- 2. Fuerza Triangular
- 3. Fuerza Rectangular
- 4. Medio Seno

El período del pulso inicial está dado para el tiempo en que la onda viaja a la punta y regresa a la cabeza del pilote, esto es:

$$T = 2L / c \quad (6.1)$$

**6.1.1 Fuerza Instantánea.** El pulso generado por una fuerza instantánea representa el caso hipotético en el que se genera una fuerza máxima ( $F_{\text{máx}}$ ) en la mitad del tiempo de contacto ( $t_c$ ). A continuación se presentan las gráficas generadas para los valores predeterminados de propiedades del pilote y pulso inicial (Ver Figura 49) modificando la cantidad de divisiones  $N$  del periodo  $T$ , para diferentes valores del exponente desde 1 hasta 11 como se indica bajo cada gráfica.

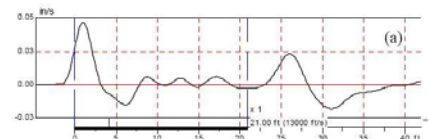
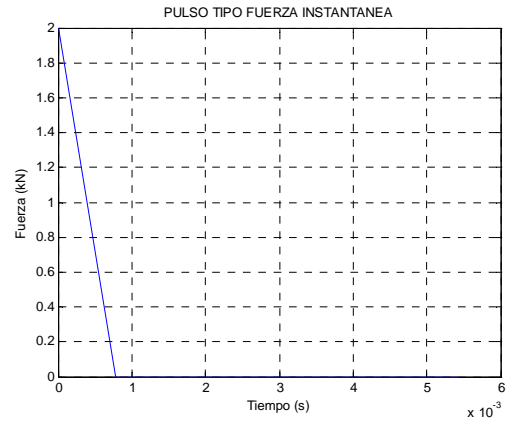
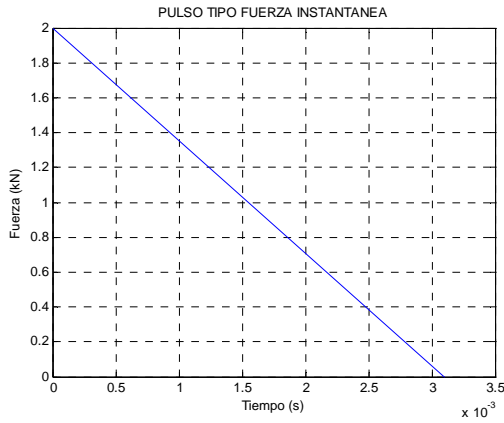
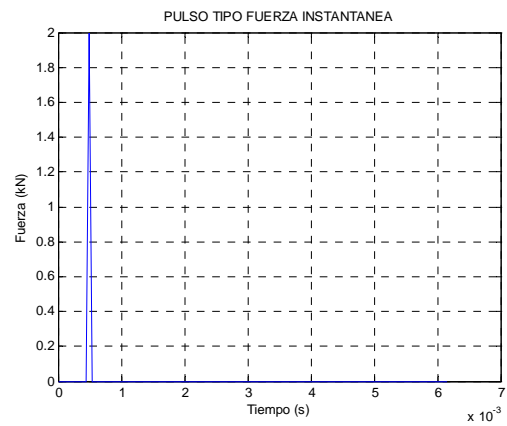
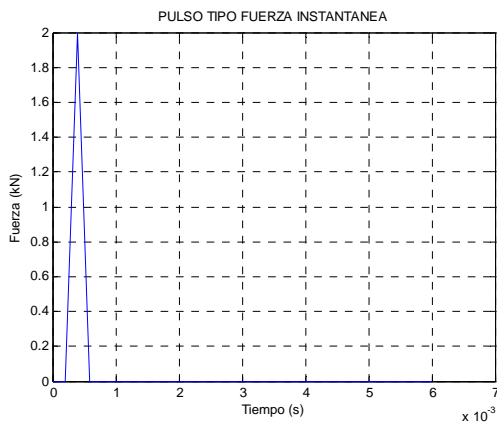


Figura 78 Pulso generado por la fuerza instantánea con diferentes divisiones  $N$  del período  $T$



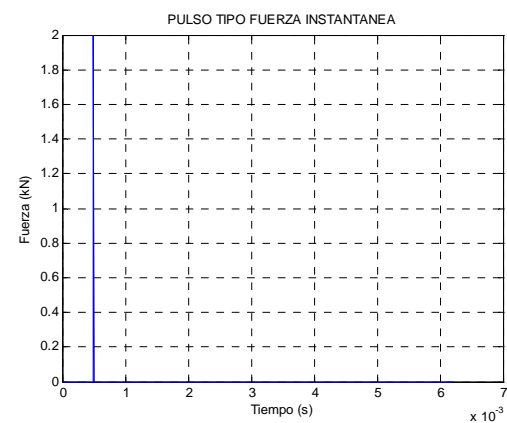
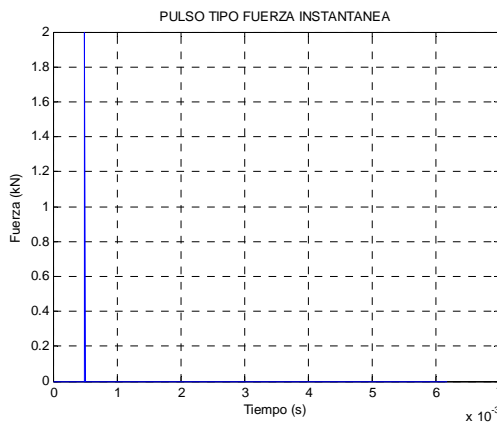
$$N = 2^1 = 2$$

$$N = 2^3 = 8$$



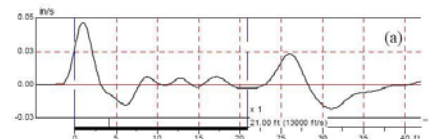
$$N = 2^5 = 32$$

$$N = 2^7 = 128$$



$$N = 2^9 = 512$$

$$N = 2^{11} = 2048$$



En la figura 78 se puede observar que el pulso debe tener un número de divisiones  $N$  para el periodo del pulso, definido como el tiempo de ida y regreso de la onda de impacto ( $T=2L/c$ ), lo suficientemente grande para que los incrementos de tiempo  $dT$  sean pequeños y se pueda representar el pulso con una mayor cantidad de puntos de fuerza. Lo anterior se puede apreciar al analizar la figura 78 desde la gráfica 1 con apenas 2 divisiones del periodo  $T$  hasta las gráficas 5 y 6 con una mayor cantidad de divisiones  $N$  que definen de una mejor manera el pulso.

Igualmente, se puede observar que el periodo  $T$  asociado al tiempo que demora la onda en ir hasta la punta y volver a la cabeza del pilote, alcanza su valor real con mayor número de divisiones  $N$ , como se observa en las gráficas 5 y 6. En las primeras 4 gráficas el valor de  $T=2L/c$  de aproximadamente un valor de 0.00612 segundos (6.12 milisegundos) no es alcanzado. En todas las gráficas mostradas en la figura 78 se observa que el valor de la fuerza máxima de 2kN está presente siempre y a partir de la gráfica 3 con un valor del exponente por encima de un valor de 4 la forma del pulso irá reduciendo la forma triangular aparente a medida que el incremento del tiempo  $dT=T/N$  disminuye, para asemejarse más a un pulso puntual.

El pulso generado por una fuerza instantánea no representa de ninguna manera el pulso generado tras el impacto del martillo sobre la cabeza del pilote en la prueba PIT, pero es útil para mostrar la forma como la solución de la ecuación de propagación de onda sirve para éste y otro tipo de pulsos como se verá con más detalle en los siguientes análisis.

**6.1.2 Pulso Triangular.** El pulso que se genera al seleccionar la opción triangular representa el caso de una fuerza que se incrementa con pendiente constante desde una fuerza 0 hasta una fuerza máxima ( $F_{\text{máx}}$ ) en la mitad del tiempo de contacto ( $t_c$ ), y luego decrece desde dicha fuerza con pendiente constante hasta cero para alcanzar el tiempo de contacto ( $t_c$ ). A continuación se presentan las gráficas generadas para los valores predeterminados de propiedades del pilote y pulso inicial (Ver Figura 49) modificando la cantidad de divisiones  $N$  del periodo  $T$ , para diferentes valores del exponente desde 1 hasta 11 como se indica bajo cada una de las gráficas.

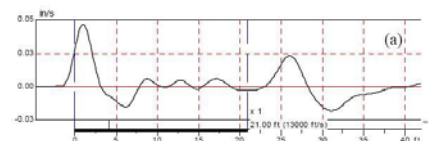
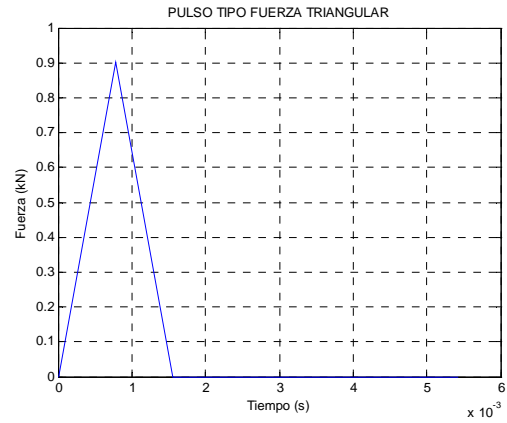
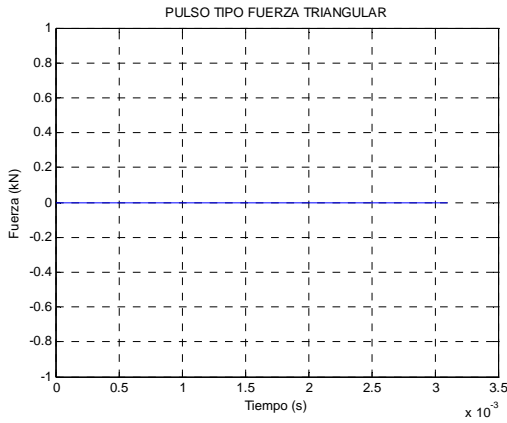
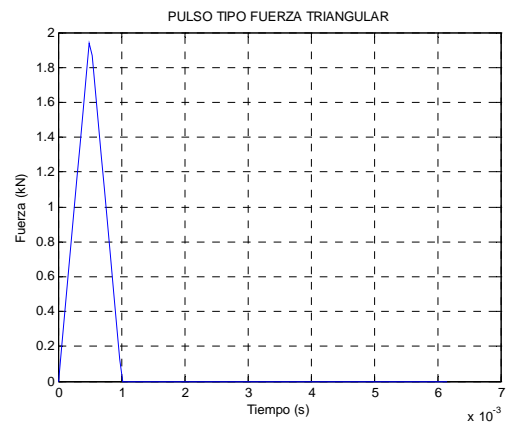
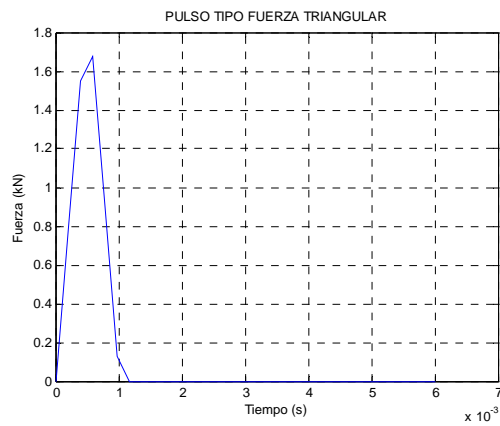


Figura 79 Pulso generado por el pulso triangular con diferentes divisiones  $N$  del periodo  $T$



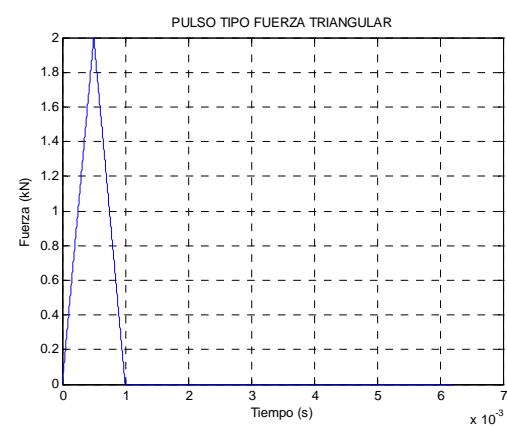
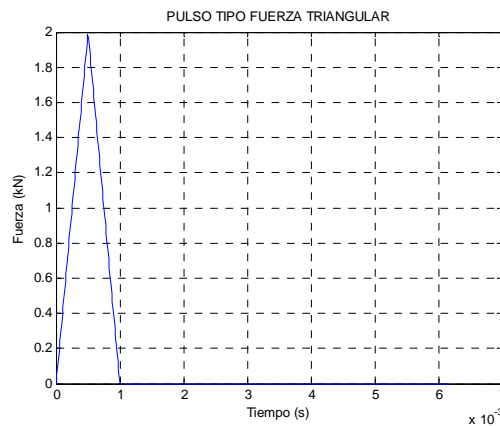
$$N = 2^1 = 2$$

$$N = 2^3 = 8$$



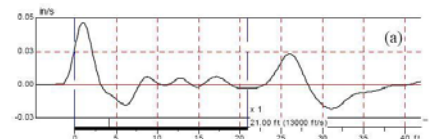
$$N = 2^5 = 32$$

$$N = 2^7 = 128$$



$$N = 2^9 = 512$$

$$N = 2^{11} = 2048$$



Al igual que como se analizó para el pulso por fuerza instantánea, es de suma importancia generar un pulso con una cantidad N de divisiones adecuada para su representación.

Dicho lo anterior se puede ver que el pulso solamente alcanza su valor pico ( $F_{m\acute{a}x}=2\text{kN}$ ) a partir de la gráfica 5. Por su parte, las gráficas anteriores no alcanzan el valor máximo de la fuerza lo cual hace que presenten formas diferentes a la que se quiere representar.

El pulso de tipo triangular se acerca a una representación del pulso generado por la prueba PIT, al incorporar un incremento, un valor pico y un decremento de la fuerza en un tiempo de contacto establecido. La función que define el pulso triangular está dada de la siguiente manera dentro del código fuente:

$$\begin{cases} F(t) = \frac{F_{m\acute{a}x}}{t_c/2} t, & 0 \leq t < t_c/2 \\ F(t) = -\frac{F_{m\acute{a}x}}{t_c/2} t + 2F_{m\acute{a}x} & t_c/2 \leq t \leq t_c \end{cases} \quad (6.2)$$

Las pruebas PIT aunque muestran un comportamiento parecido para el pulso inicial, no presentan un cambio tan brusco al alcanzar la fuerza máxima.

**6.1.3 Pulso tipo Rectangular.** El pulso que se genera al seleccionar la opción rectangular representa el caso de una fuerza constante máxima durante el tiempo de contacto ( $t_c$ ).

A continuación se presentan las gráficas generadas para los valores predeterminados de propiedades del pilote y pulso inicial (Ver Figura 49) modificando la cantidad de divisiones N del período T para diferentes valores del exponente desde 1 hasta 11 como se indica bajo cada gráfica.

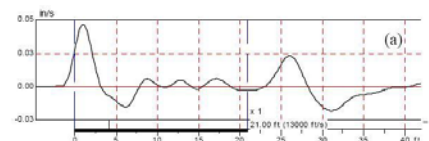
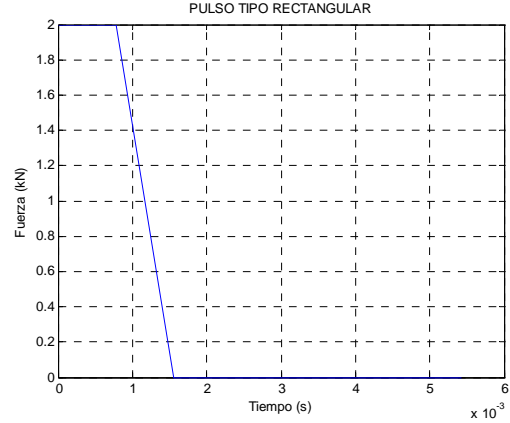
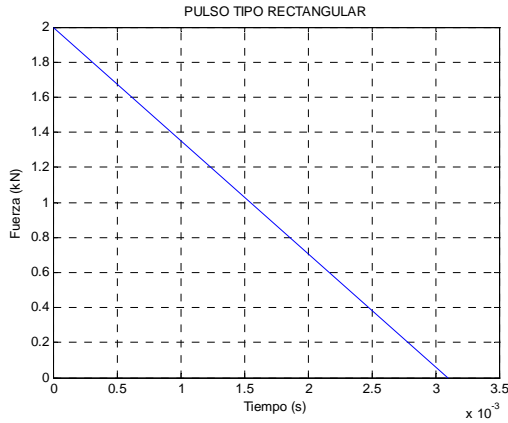


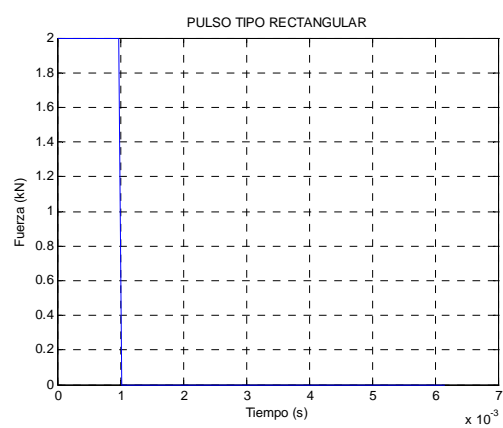
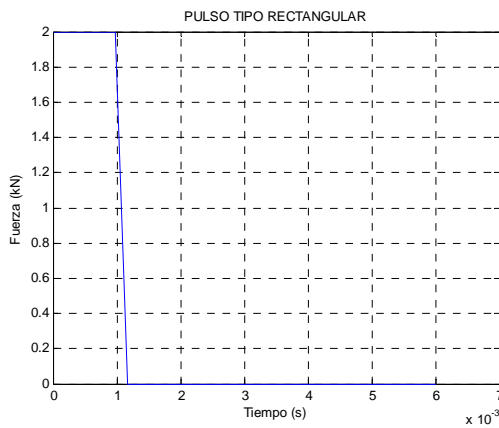


Figura 80 Pulso generado por el pulso rectangular con diferentes divisiones  $N$  del período  $T$



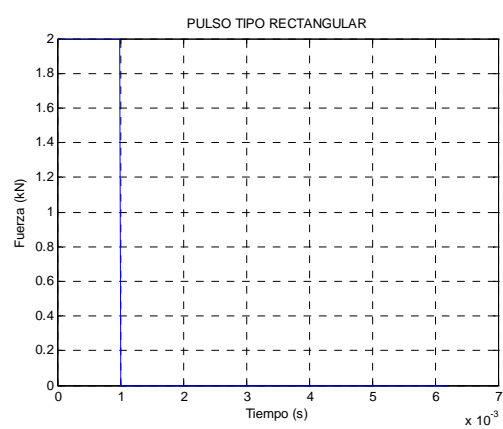
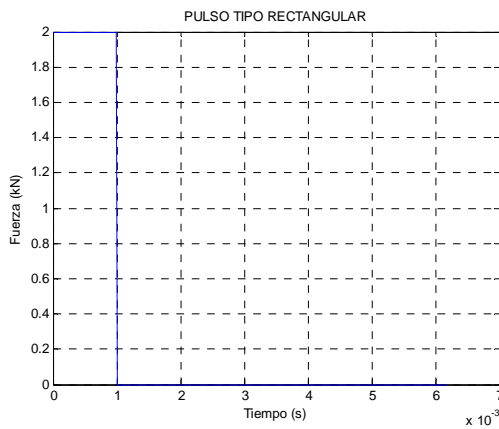
$$N = 2^1 = 2$$

$$N = 2^3 = 8$$



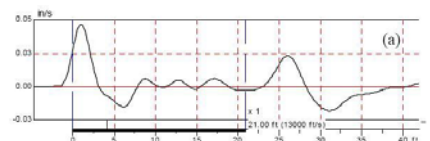
$$N = 2^5 = 32$$

$$N = 2^7 = 128$$



$$N = 2^9 = 512$$

$$N = 2^{11} = 2048$$



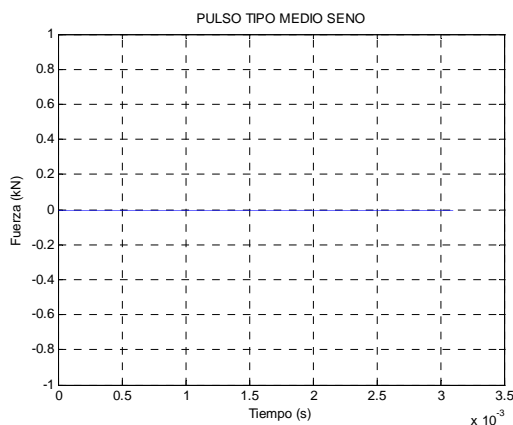
Las anteriores gráficas muestran de nuevo la importancia de seleccionar un número de divisiones por encima de 512 (A partir de un valor de 9 para el exponente), Al igual que con el pulso por fuerza instantánea el valor de la fuerza máxima se alcanza en todas las gráficas, pero la representación del pulso más cercana a una de tipo rectangular se encuentra a partir de la gráfica 5 de la figura 80. Igualmente el período se alcanzado con mayor precisión a mayor cantidad de N divisiones.

Este tipo de pulso no representa el generado por la prueba PIT y por tanto tan solo sirve como un pulso teórico para realizar diferentes análisis.

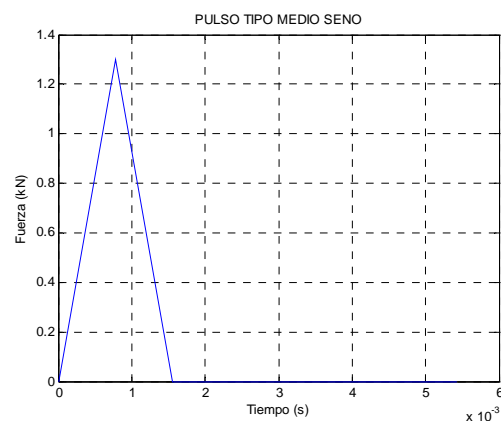
**6.1.4 Pulso tipo Medio Seno.** El pulso que se genera al seleccionar la opción medio seno representa el caso de una fuerza descrita por la ecuación (4.8) y que se explicó en el numeral 4.2.2.

A continuación se presentan las gráficas generadas para los valores predeterminados de propiedades del pilote y pulso inicial (Ver Figura 49) modificando la cantidad de divisiones N del período T para diferentes valores del exponente desde 1 hasta 11 como se indica bajo cada gráfica.

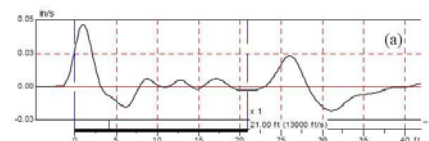
**Figura 81** Pulso generado por el pulso Medio Seno con diferentes divisiones N del periodo T  
(1 Parte)



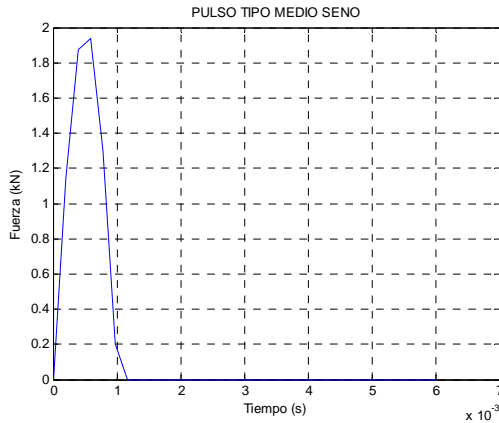
$$N = 2^1 = 2$$



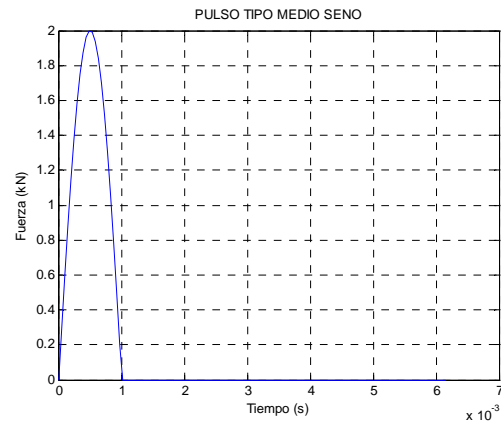
$$N = 2^3 = 8$$



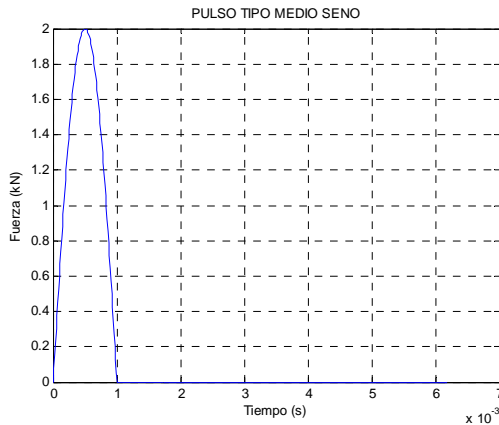
**Figura 81** Pulso generado por el pulso Medio Seno con diferentes divisiones  $N$  del periodo  $T$   
 (2 Parte)



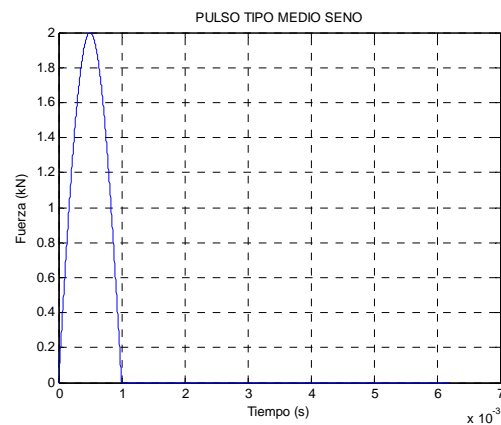
$$N = 2^5 = 32$$



$$N = 2^7 = 128$$

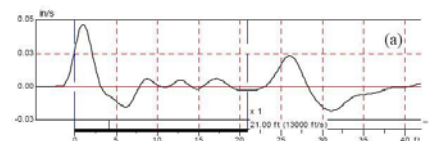


$$N = 2^9 = 512$$



$$N = 2^{11} = 2048$$

Al igual que todos los tipos de pulsos analizados es importante escoger un número de divisiones  $N$  mayor o igual a 512 para lograr menores valores de incrementos de tiempo ( $dT=T/N$ ) y así representar el pulso de la manera más precisa posible. A diferencia del pulso triangular, el pulso medio seno logra llegar a un valor máximo de la fuerza con una sola función de fuerza respecto al tiempo y el cambio de la tendencia de la fuerza no es drástico sino gradual.



Éste tipo de pulso es el que más se acerca al generado por el impacto del martillo sobre la cabeza del pilote al realizar la prueba PIT y por tanto debe ser el pulso inicial para realizar la simulación de la prueba posteriormente.

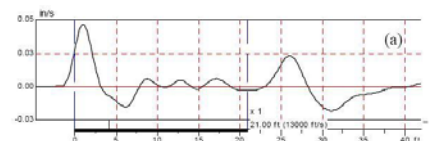
## 6.2 ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DEL PULSO A LO LARGO DEL PILOTE

Al resolver la ecuación diferencial parcial que representa la propagación de ondas en una dimensión mediante la metodología espectral con el pulso inicial generado, es posible llegar a analizar la forma cómo la onda va viajando y por tanto ver cómo se van propagando a lo largo del pilote las siguientes propiedades mecánicas definidas en la tabla 6:

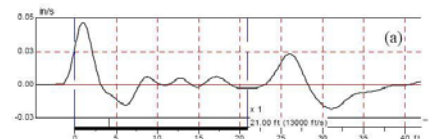
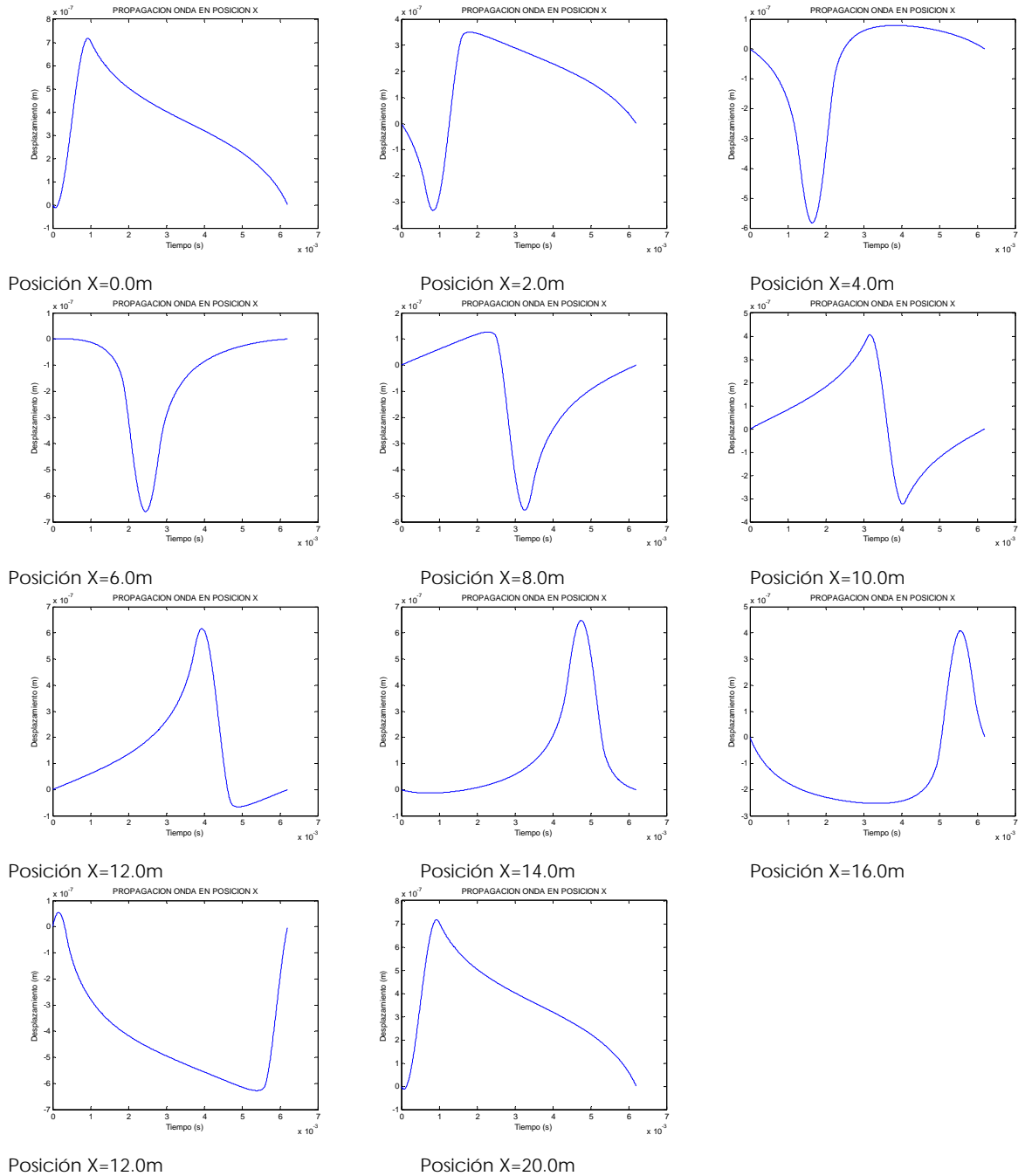
1. Desplazamiento  $u(x,t)$  que en forma espectral está definido como:  $u_i = Ae^{-i(kx-\omega t)}$
2. Velocidad  $\dot{u}(x,t)$  que en forma espectral está definida como:  $\dot{u}_i = i\omega u_i$
3. Aceleración  $\ddot{u}(x,t)$  que en forma espectral está definida como:  $\ddot{u}_i = i^2\omega^2 u_i$
4. Esfuerzo  $\sigma(x,t)$  que en forma espectral está definido como:  $\sigma_i = -ikEu_i$
5. Deformación  $e(x,t)$  que en forma espectral está definida como:  $e_i = -iku_i$
6. Fuerza  $F(x,t)$  que en forma espectral está definida como:  $F_i = -ikEAu_i$

Como se puede apreciar, a partir de la velocidad, todas las propiedades dependen del cálculo adecuado del desplazamiento  $u_i$ .

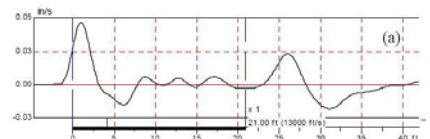
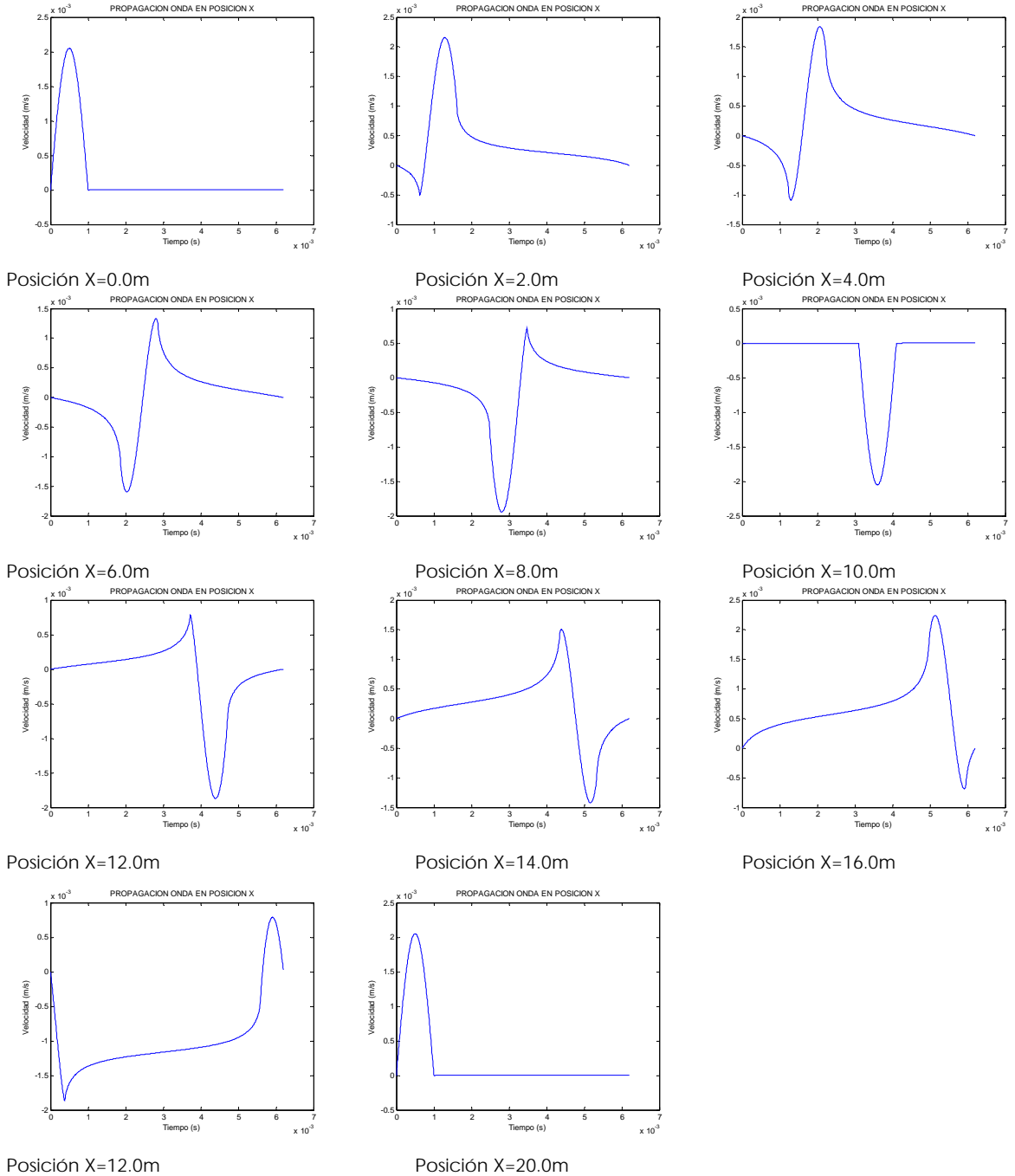
**6.2.1 Comportamiento del desplazamiento, velocidad y aceleración.** A continuación se analizarán las tres primeras propiedades mecánicas mediante las gráficas que el programa PITGRAPH genera de manera predeterminada para la propagación del pulso en la posición X deseada. Lo anterior se lleva a cabo al seleccionar el tipo de gráfica del menú y oprimir el botón GRAFICAR EN POSICIÓN X.



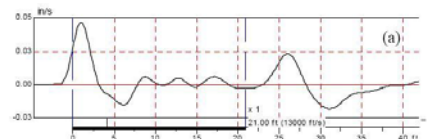
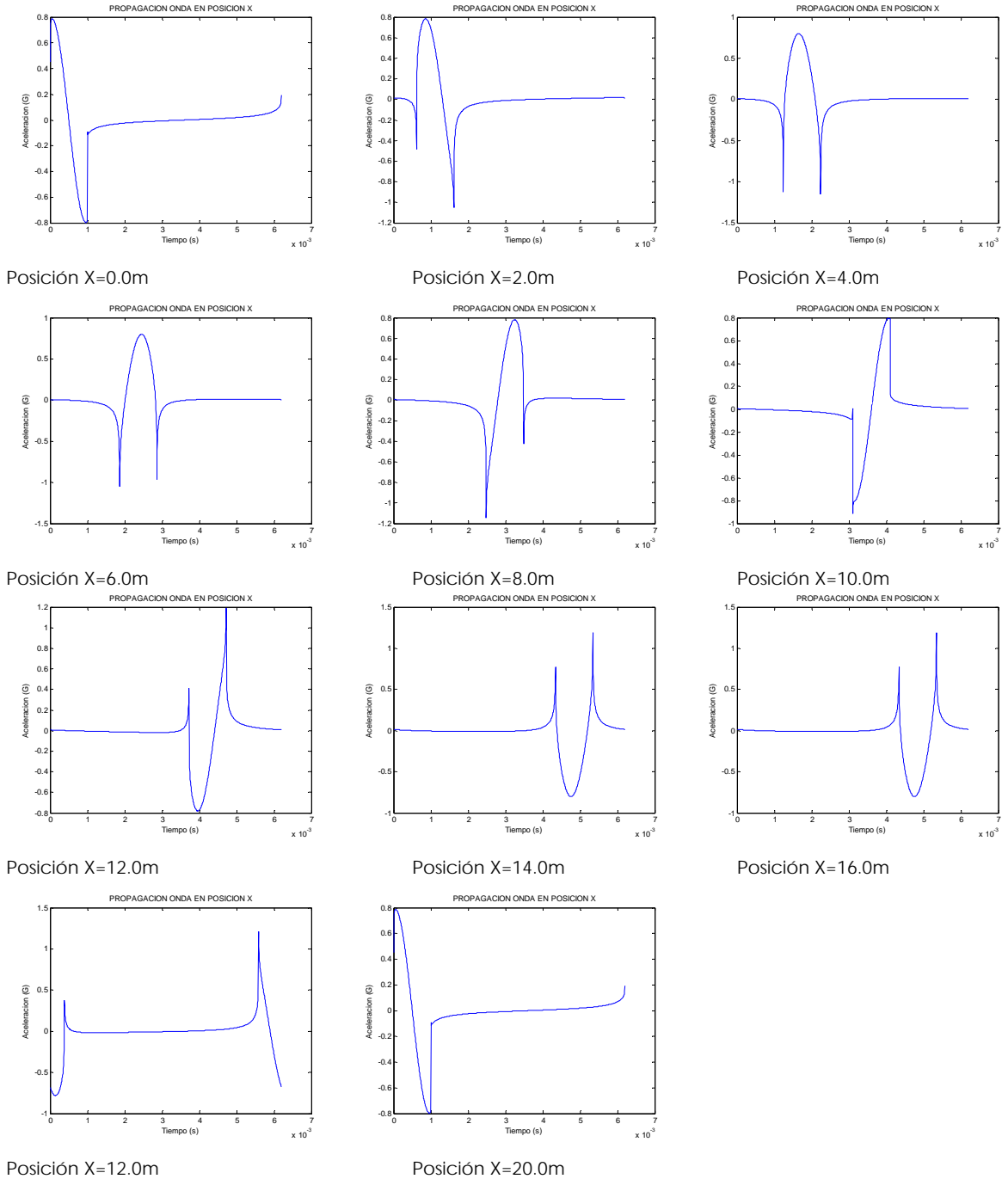
**Figura 82** Desplazamiento para pulso Medio Seno predeterminado en diferentes posiciones X



**Figura 83** Velocidad para pulso Medio Seno predeterminado en diferentes posiciones X



**Figura 84** Aceleración para pulso Medio Seno predeterminado en diferentes posiciones X

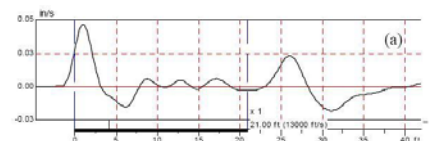


En la figura 82 se aprecia que el pulso de fuerza predeterminado con forma de medio seno se soluciona para el desplazamiento evaluando en diferentes posiciones del pilote. Se observa que en la posición  $X=0$  se tiene el desplazamiento máximo de  $7 \times 10^{-7} \text{m}$  a la altura de un tiempo de  $0.001 \text{s}$  o el tiempo de contacto predeterminado del pulso. A medida que va viajando el pulso, y el desplazamiento se evalúa en diferentes posiciones, se observa que éste va cambiando de forma y gradualmente va tomando valores por debajo de cero (hasta la posición  $X=6$ ) y luego nuevamente empieza a tomar valores positivos hasta volver a tomar la forma del desplazamiento en  $X=20$  tal y como comenzó en  $X=0$ . Esto significa que para una sola onda viajando a la derecha el pulso al regresar a la cabeza del pilote (habiendo recorrido 20 metros) genera un desplazamiento igual al generado por el martillo al iniciar la prueba.

En la figura 83 la solución para la velocidad evaluada en diferentes posiciones del pilote muestra que tiene la misma forma del pulso de fuerza en la posición  $X=0$  (cabeza del pilote) y que a medida que va viajando en el pilote va invirtiéndose gradualmente hasta alcanzar la punta ( $X=10$ ) en donde se tienen exactamente los mismos valores de velocidad pero invertidos y trasladados el tiempo de llegada del pulso a la punta ( $t=L/c$ ). El valor máximo de la velocidad alcanzado en toda la propagación es de  $0.002 \text{ m/s}$  alcanzado en la cabeza y punta del pilote para la mitad del tiempo de contacto del pulso.

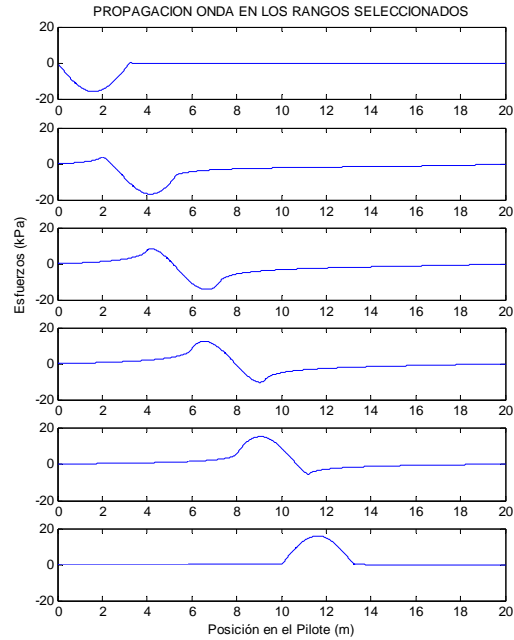
Por su parte la secuencia de propagación mostrada en la figura 84 muestra el mismo comportamiento de la figura 83 en donde se obtiene una inversión de los valores de aceleración al llegar a la punta respecto a los generados en la cabeza ( $X=0$ ). El máximo valor de la aceleración en la propagación corresponde a  $0.8G$  o  $7.85 \text{ m/s}^2$ .

**6.2.2 Comportamiento de la propagación del esfuerzo, deformación y fuerza de reacción.** A continuación se analizará la propagación del esfuerzo, deformación y fuerza de reacción generados por el impacto del martillo, mediante las gráficas que el programa PITGRAPH genera de manera predeterminada para la propagación del pulso en el rango indicado en cada una de las figuras mostradas. Lo anterior se lleva a cabo al seleccionar el tipo de gráfica del menú y oprimir el botón GRAFICAR PROPAGACIÓN en los rangos deseados.





*Figura 85 Esfuerzo para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde  $X=0$  a  $X=10$*



*Figura 86 Esfuerzo para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde  $X=10$  a  $X=20$*

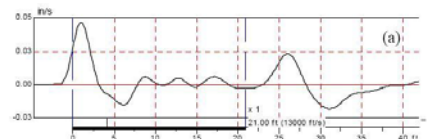
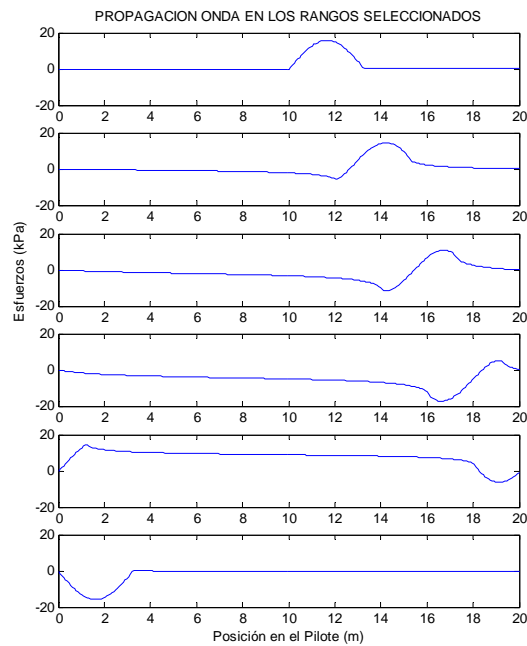


Figura 87 Deformación para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde  $X=0$  a  $X=10$

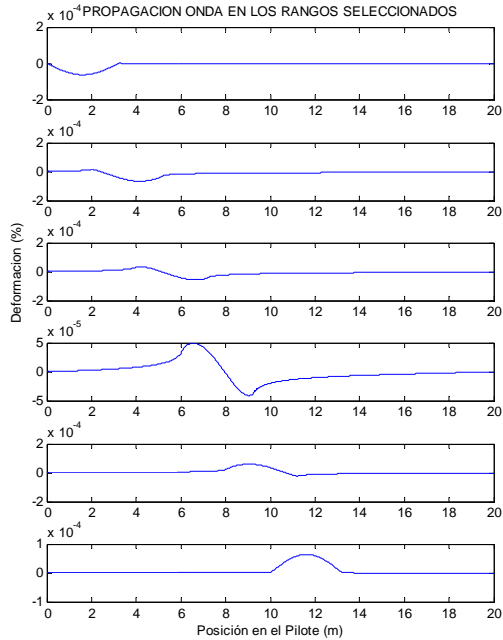
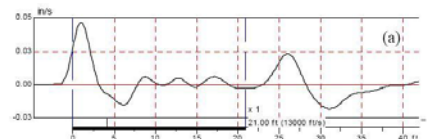
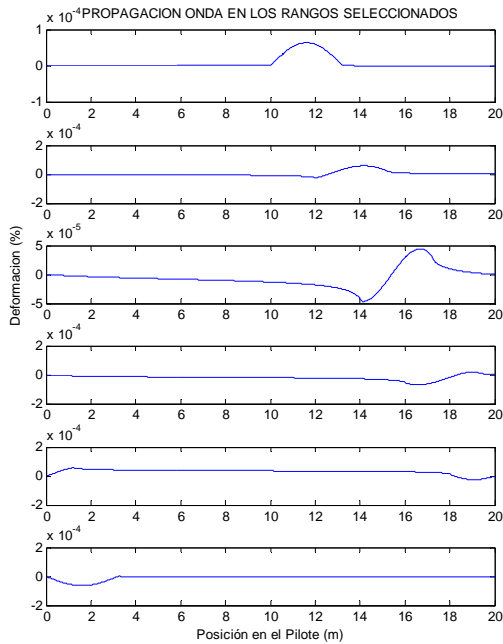
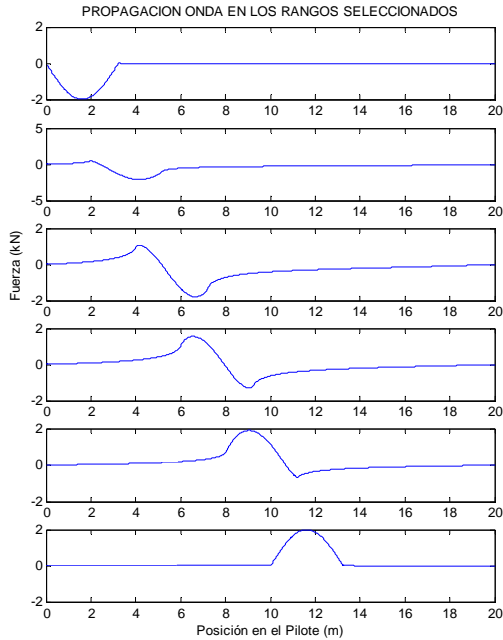


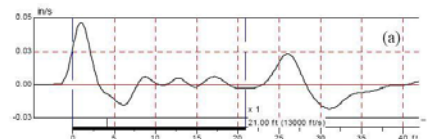
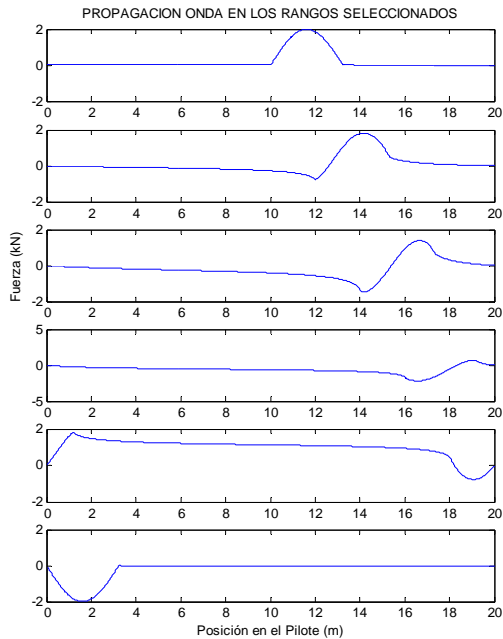
Figura 88 Deformación para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde  $X=10$  a  $X=20$



*Figura 89 Fuerza para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde  $X=0$  a  $X=10$*



*Figura 90 Fuerza para pulso Medio Seno predeterminado evaluado desde  $X=10$  a  $X=20$*



Se puede ver que en las figuras correspondientes al esfuerzo transmitido a lo largo del pilote (figuras 85 y 86) el valor máximo alcanzado corresponde a 16kPa para el pilote predeterminado. Al igual que como se comportan los parámetros de velocidad y aceleración el esfuerzo se invierte al llegar a la punta ( $X=10$ ) y retorna a su forma original al regresar a la cabeza del pilote ( $X=20$ ). De manera similar sucede con la propagación de la deformación y fuerza de reacción con valores máximos de  $5 \times 10^{-5}\%$  y de 2kN que corresponde al valor pico de la fuerza realizada por el martillo al impactar la cabeza del pilote. Éste último resultado confirma que la solución de la ecuación diferencial al fenómeno de propagación de ondas mediante la metodología espectral está correctamente implementado.

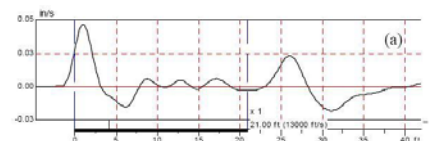
### 6.3 OBTENCIÓN DE LAS RIGIDECES DEL SUELO USANDO EL PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PLAXIS

Dentro de la sección del programa PITGRAPH que simula la prueba PIT, se encuentran dos casillas que permiten ingresar los siguientes parámetros para el suelo en el que se encuentra el pilote:

- K del suelo circundante (N/m): Correspondiente al valor de la rigidez del suelo que rodea el fuste del pilote en toda su longitud.
- K en la punta del pilote (N/m): Correspondiente al valor de la rigidez del suelo sobre el que se encuentra soportada la punta del pilote.

Para poder determinar valores razonables y cercanos a la realidad para diferentes tipos de suelos, se usó el programa de elementos finitos para análisis de suelo y roca PLAXIS 7.2 profesional.

PLAXIS tiene incorporados diferentes modelos de suelo dentro de sus opciones, dentro de los cuales se encuentra el modelo lineal elástico que fue usado para determinar los valores de las rigideces anteriormente mencionadas.



El modelo de suelo lineal elástico del programa PLAXIS representa la ley de Hooke para elasticidad isotrópica y deben ser incorporados los siguientes dos parámetros de entrada para su modelación: El módulo de Young o módulo de elasticidad y la relación de Poisson del suelo respectivo.

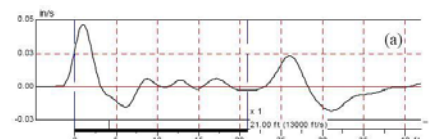
Aunque el modelo lineal elástico es poco representativo del comportamiento real de los suelos, es adecuado para la solución de la ecuación de onda implementada, ya que desde la deducción misma de la ecuación diferencial parcial, la ley de Hooke es la base teórica que rige el comportamiento del fenómeno y el parámetro de fuerza retardante debida al suelo ( $Ku$ ) de la ecuación diferencial se rige igualmente por dichos postulados. A su vez los desplazamientos y deformaciones que alcanza el pilote ante el impacto del martillo son muy pequeños (del orden de  $7.0 \times 10^{-6}$  m y  $6.5 \times 10^{-4}$  % según las figuras 56 y 60 respectivamente) y en estos rangos tango el suelo como el pilote mismo, se considera que se comportan elásticamente siguiendo la ley de Hooke.

Para obtener las rigideces correspondientes al suelo que rodea el fuste del pilote y al suelo por debajo de la punta del mismo, se debe seleccionar parámetros de acuerdo a los tipos generales de suelo mostrados en la tabla 8 y sus respectivos rangos de propiedades según DAS, 2001.

**Tabla 8** Rango de parámetros elásticos de varios suelos.

TIPO DE SUELO	Mod. Elasticidad (E) MN/m <sup>2</sup>	Relación de poisson (ν)	Peso Especifico seco (γ <sub>d</sub> ) kN/m <sup>3</sup>
Arena uniforme suelta	10,35-24,15	0,20-0,40	14,5
Arena uniforme densa	34,50-55,2	0,30-0,45	18
Arcilla Dura	41,4-96,6	0,20-0,50	17
Arcilla Suave	4,1-20,7		11,5-14,5

Fuente: Adaptado de [7] DAS, 2001



Para poder trabajar en PLAXIS es necesario establecer como primera medida la geometría del problema. En el análisis de obtención de rangos de valores de rigideces del suelo se analizaron los resultados del programa de elementos finitos para un pilote de 10.0m de longitud y diámetros de 0.4 m y 1.0m con diferentes cargas distribuidas en la cabeza del pilote con valores de 10, 50 100 y 200 kN. Los resultados del comportamiento del suelo alrededor y bajo el pilote es necesario hacerlo bajo el modelo axisimétrico que se selecciona dentro de los parámetros generales de cálculo del programa y por tanto la geometría se elabora para la mitad del problema

Una vez definida la geometría de los pilotes y el suelo se asignan las propiedades a cada una de las zonas de tal manera que se asignen diferentes colores a los diferentes materiales posibles.

Para realizar las diferentes simulaciones en PLAXIS se asignaron propiedades dentro de los rangos dados en la tabla 8 para los siguientes materiales:

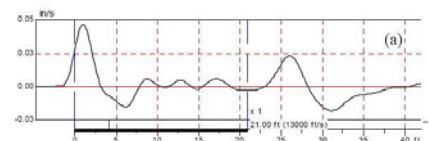
*Figura 91 Tipos de materiales modelados en PLAXIS*



Las propiedades del pilote se establecieron con los siguientes valores:

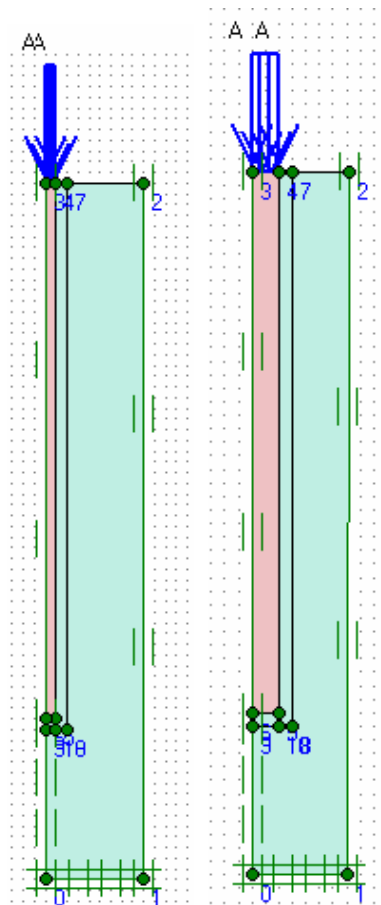
*Tabla 9 Propiedades mecánicas asignadas al pilote para modelar en PLAXIS*

TIPO DE SUELO	Peso Especifico ( $\gamma$ ) kN/m <sup>3</sup>	Mod. Elasticidad ( E ) MN/m <sup>2</sup>	Relación de poisson ( $\nu$ )
Pilote	24	25000	0,3

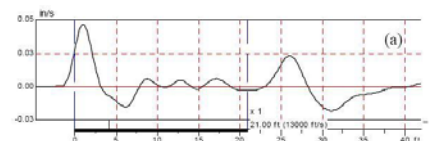


Luego de asignar los materiales a los sectores de análisis se delimitan las fronteras del problema con restricciones de tipo horizontal de tal manera que se garantice en los límites de la geometría, el desplazamiento vertical debido a los efectos de las cargas a simular. A continuación se muestra en la figura 92 la geometría, suelos y restricciones para los casos simulados.

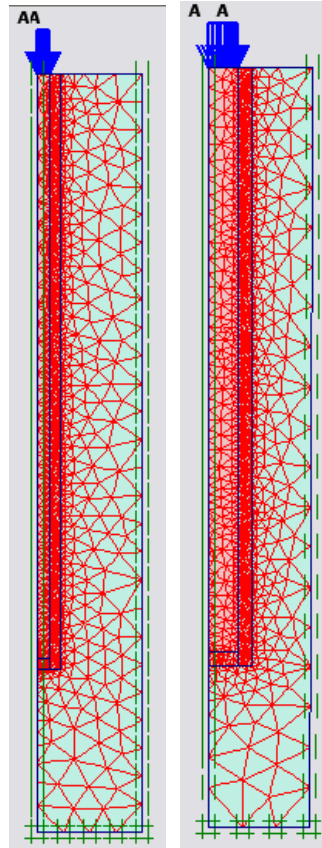
**Figura 92** Condiciones para los pilotes de  $L=10.0m$  y  $\phi$  de  $0.4$  y  $1.0m$  para analizar en elementos finitos mediante PLAXIS.



Luego de haber realizado todo el procedimiento anterior se genera la malla de elementos finitos:



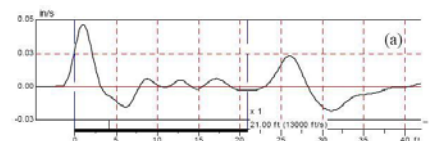
*Figura 93 Malla de elementos finitos para los pilotes de  $L=10.0m$  y  $\phi$  de  $0.4$  y  $1.0m$  generada mediante PLAXIS*



Posteriormente a la generación de la malla y no realizar cambios para las condiciones iniciales del nivel freático y esfuerzos por la sencillez de los modelos, se procede a acceder a los cálculos que realiza PLAXIS.

Para cada una de las geometrías mostradas se ejecutó el programa para los suelos escogidos (Ver Tabla 8) con cargas de 10, 50, 100 y 200kN en la cabeza del pilote. Los parámetros necesarios para el cálculo de la rigidez de los suelos son dos:

- Desplazamientos Verticales en el fuste del pilote y en la punta ( $u_y$ )





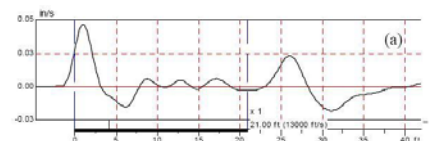
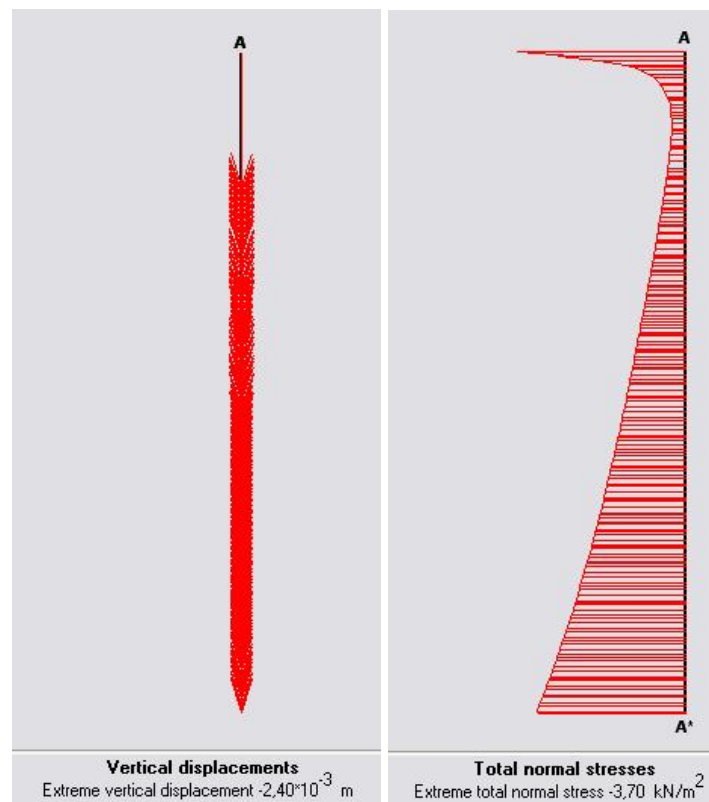
- Esfuerzos Totales en el fuste del pilote y en la punta (con el que se calcula la fuerza del suelo sobre el pilote)  $F_{\sigma}$

La rigidez  $K$  para el suelo alrededor del fuste del pilote y en la punta está definida como

$$K = \frac{u_y}{F_{\sigma}} \quad (6.3)$$

Dichos parámetros se obtuvieron con los resultados del programa y se pueden ver de forma gráfica y mediante reportes en tablas. La vista gráfica de tales parámetros es mostrado como a continuación:

*Figura 94 Ejemplo de resultados de deformaciones verticales y esfuerzos totales obtenidos mediante PLAXIS a lo largo del fuste del pilote*

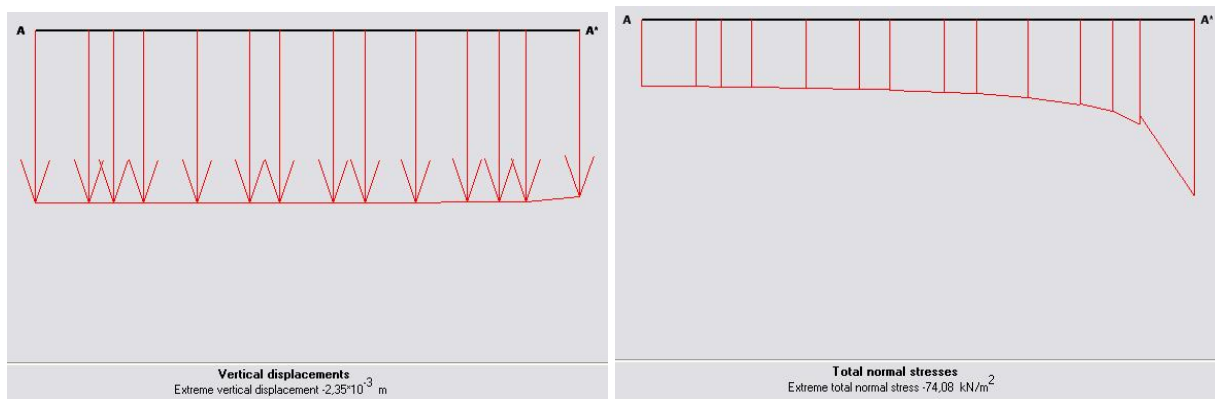


Para calcular la rigidez  $K$  en el fuste del pilote para cada caso particular se evaluaban los desplazamientos y esfuerzos totales debidos a la carga aplicada, a una profundidad de 1.0m y 2.0m para ser promediados y multiplicados por el área de la superficie en esa sección. Así se obtiene la fuerza aplicada promedio para dicha sección del pilote.

Dado que el modelo que rige la simulación de los materiales seleccionados es de tipo lineal elástico, obtener esfuerzos y deformaciones a cualquier otra profundidad garantiza los mismos resultados de la rigidez  $K$  del fuste del pilote.

De igual manera, para el cálculo de la rigidez del suelo en la punta del pilote se determina el desplazamiento y el esfuerzo en dicha zona. La fuerza asociada al esfuerzo en la punta se calcula al ser multiplicada por el área del pilote.

*Figura 95 Ejemplo de resultados de deformaciones verticales y esfuerzos totales obtenidos mediante PLAXIS en la punta del pilote*



Los gráficos de Fuerza vs. Desplazamiento en el fuste y la punta para los pilotes de diámetro de 0.4m y 1.0m se muestran a continuación:

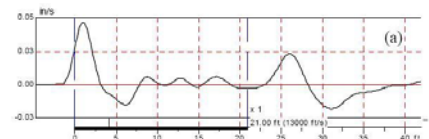


Figura 96 Rigideces  $K$  en el fuste del pilote para diferentes suelos (Pilote de  $\phi = 0.4\text{m}$ )

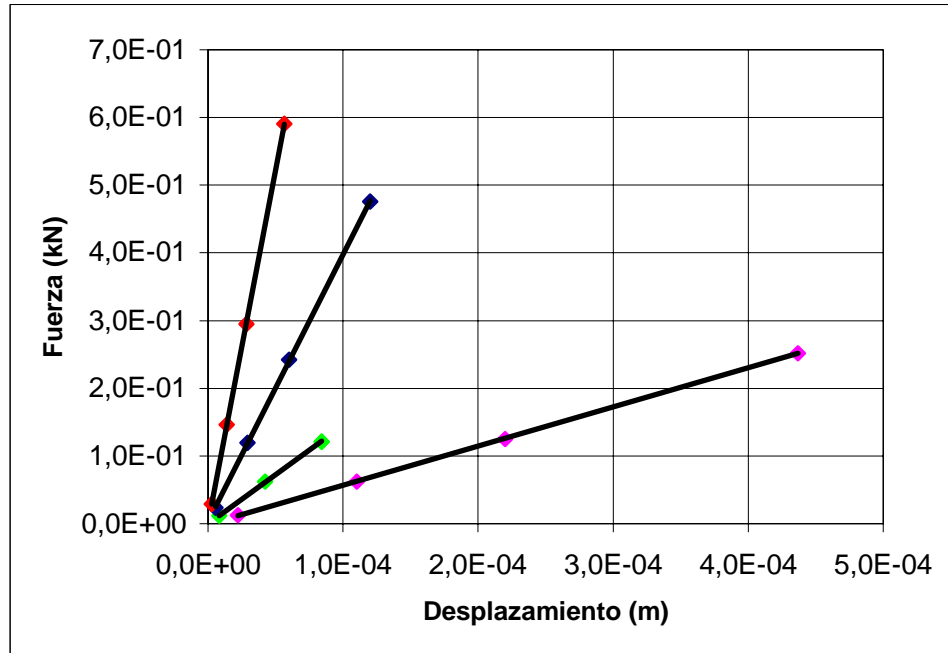
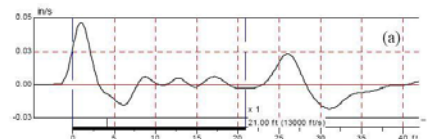
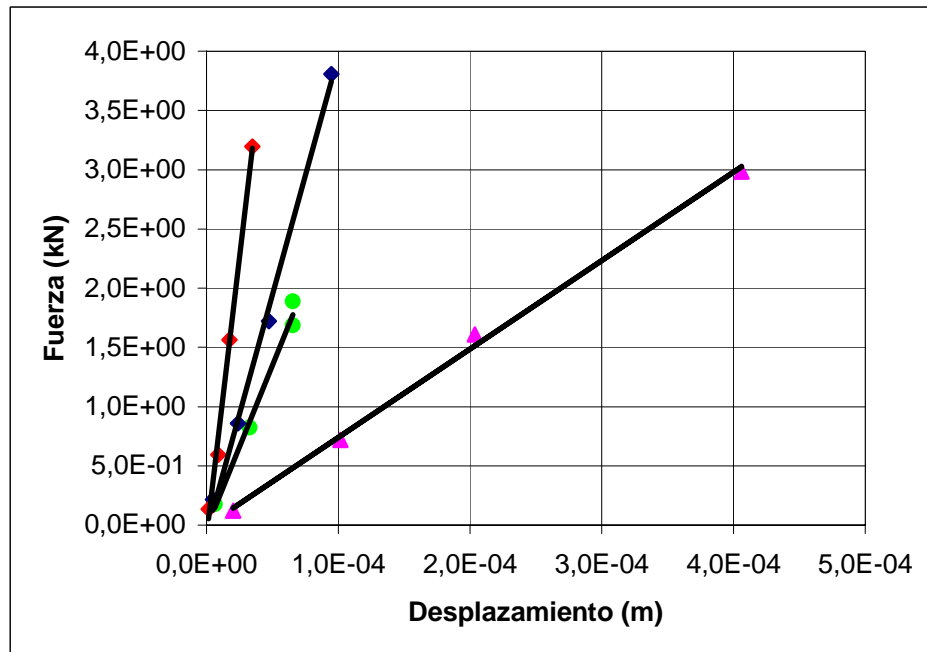
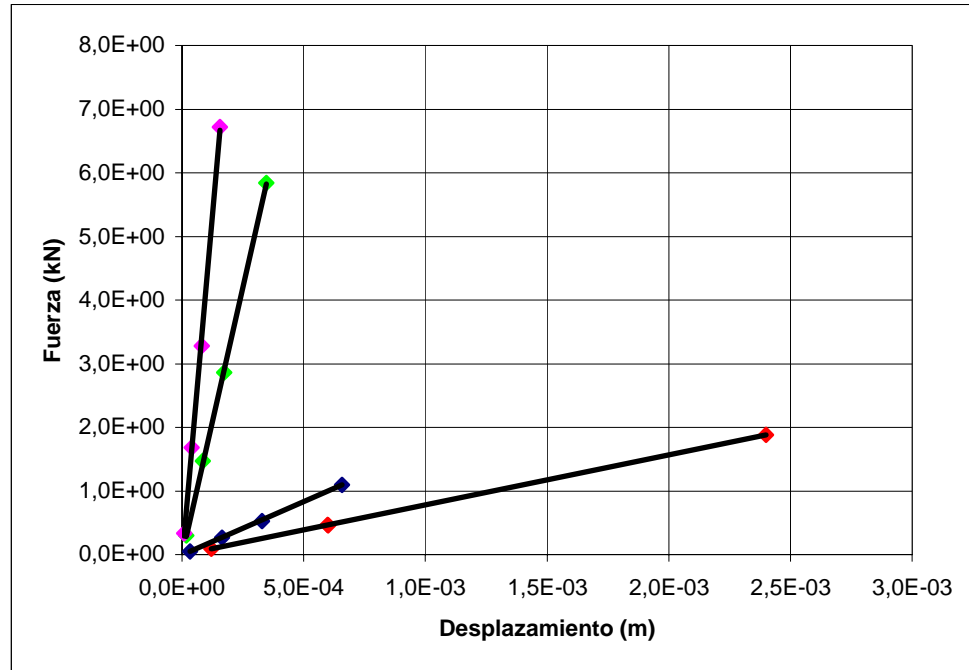


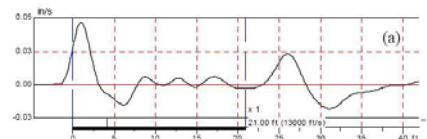
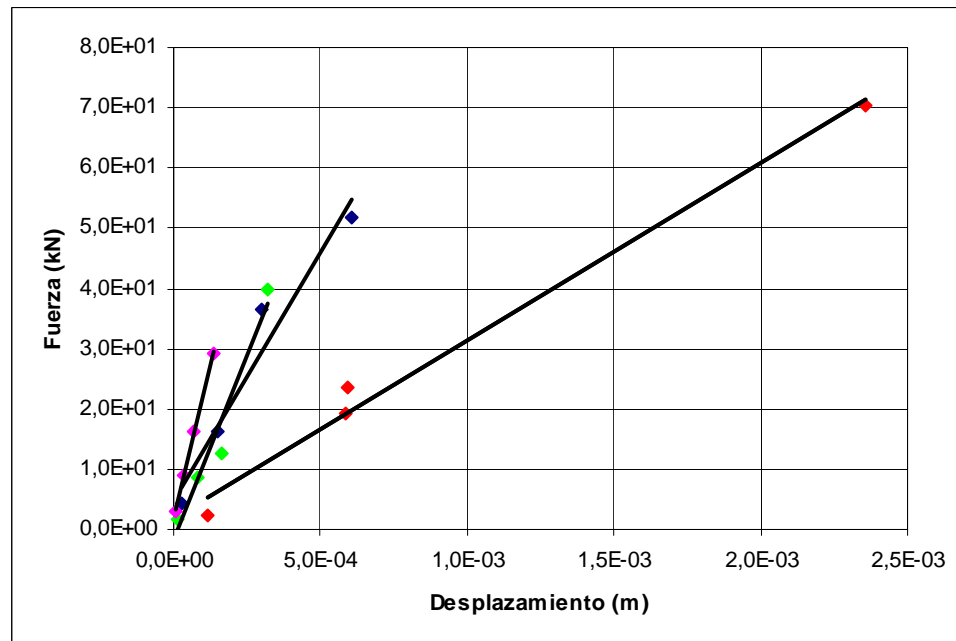
Figura 97 Rigideces  $K$  en la punta del pilote para diferentes suelos (Pilote de  $\phi = 0.4\text{m}$ )



*Figura 98 Rigideces  $K$  en el fuste del pilote para diferentes suelos (Pilote de  $\phi = 1.0m$ )*



*Figura 99 Rigideces  $K$  en la punta del pilote para diferentes suelos (Pilote de  $\phi = 1.0m$ )*



En la siguiente tabla se resumen los valores de las rigideces para los distintos casos simulados:

*Tabla 10 Resultado de las rigideces K de los casos simulados mediante PLAXIS*

TIPO DE SUELO	DIÁMETRO DEL PILOTE			
	$\phi=0,4m$		$\phi=1,0m$	
	Kpunta (N/m)	Kfuste (N/m)	Kpunta (N/m)	Kfuste (N/m)
Arcilla Blanda	7,46E+06	5,79E+05	2,94E+07	7,87E+05
Arcilla Dura	2,76E+07	1,44E+06	8,31E+07	1,67E+06
Arena Suelta	4,01E+07	3,95E+06	1,24E+08	1,68E+07
Arena Densa	9,44E+07	1,04E+07	2,06E+08	4,29E+07

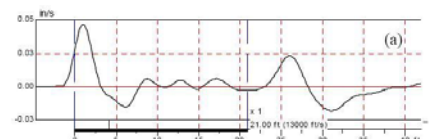
Como se puede apreciar en las gráficas y en la tabla anterior, el valor de la rigidez (pendiente de las líneas de tendencia) va aumentando a medida que el tipo de suelo es más duro para el caso de las arcillas y denso para el caso de las arenas. Igualmente los valores del pilote con un diámetro de 1.0m son mayores que los obtenidos para el de un diámetro de 0.4m

En el Anexo 2 se detalla las diferentes tablas de cálculo y gráficas para cada una de las rigideces mostradas en la tabla 10

## 6.4 SIMULACIÓN DE DIFERENTES CASOS DE LA PRUEBA PIT

Por medio de la sección de la interfaz gráfica del programa PITGRPAH en donde se ingresan los parámetros y selección de opciones de la prueba PIT se pueden llevar a cabo diferentes simulaciones para ser analizadas.

Como se explicó con detalle en las secciones 4.2.4 y 4.3 del presente documento, existen diferentes condiciones de frontera que pueden presentarse en los pilotes, las cuales se presentaban de manera gráfica en la figura 47 y pueden ser analizados de manera espectral.



En la figura 100 y 101 se presentan los casos que son simulados por medio del programa PITGRAPH, tratando de considerar todas las combinaciones de condiciones de frontera con y sin fuerzas retardantes para su análisis. La simulaciones se harán para los parámetros de entrada del pilote predeterminado (Ver figura 49) en donde los valores del pilote simulado son:

- Longitud= 10.0 m
- Diámetro nominal=0.4 m
- Densidad del concreto: 2400 kg/m<sup>3</sup>
- Módulo de elasticidad: 25 GPa
- Fuerza máxima de contacto: 2 kN
- Tiempo de Contacto: 0.001 s
- Ubicación del cambio de impedancia: 5.0m

*Figura 100 Casos simulados mediante el programa PITGRAPH (1 Parte)*

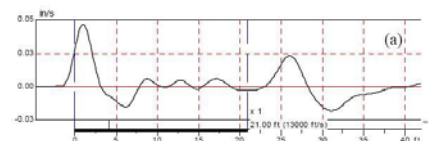
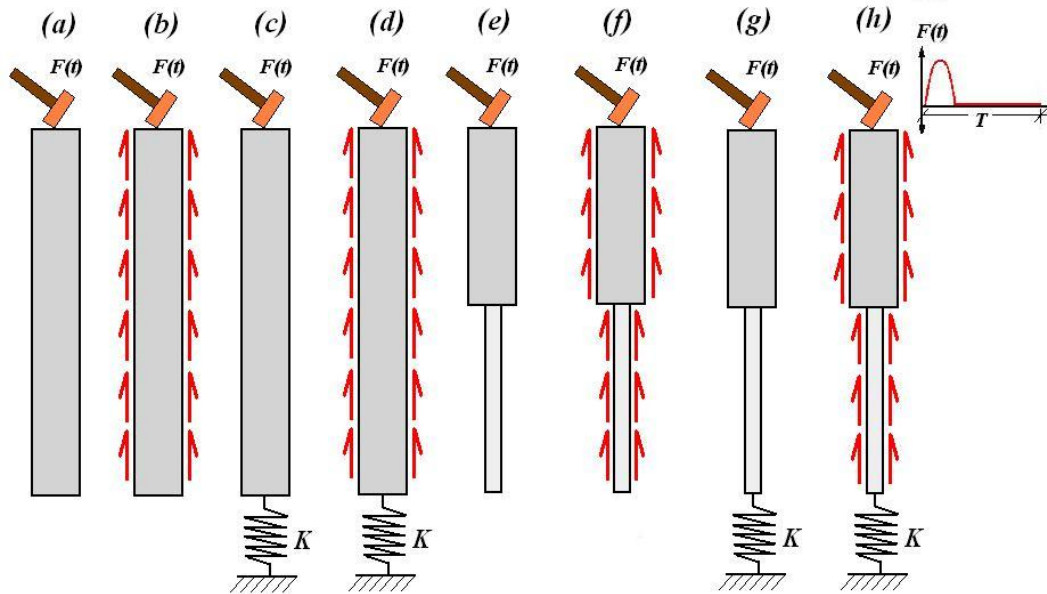
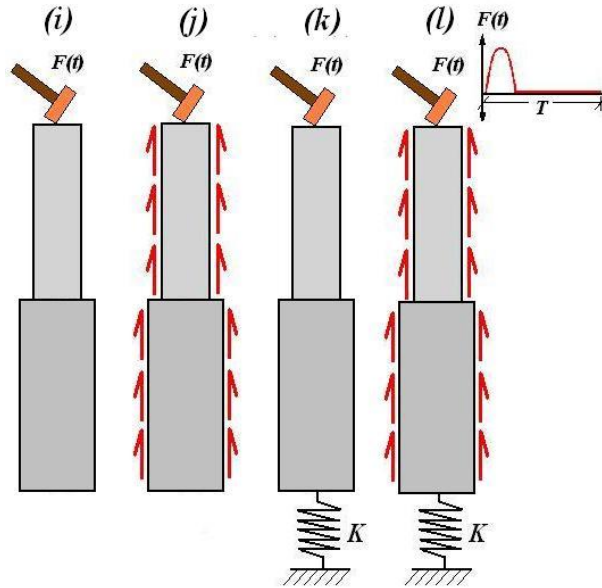
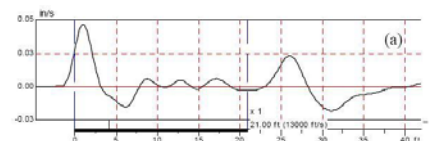


Figura 101 Casos simulados mediante el programa PITGRAPH (2 Parte)

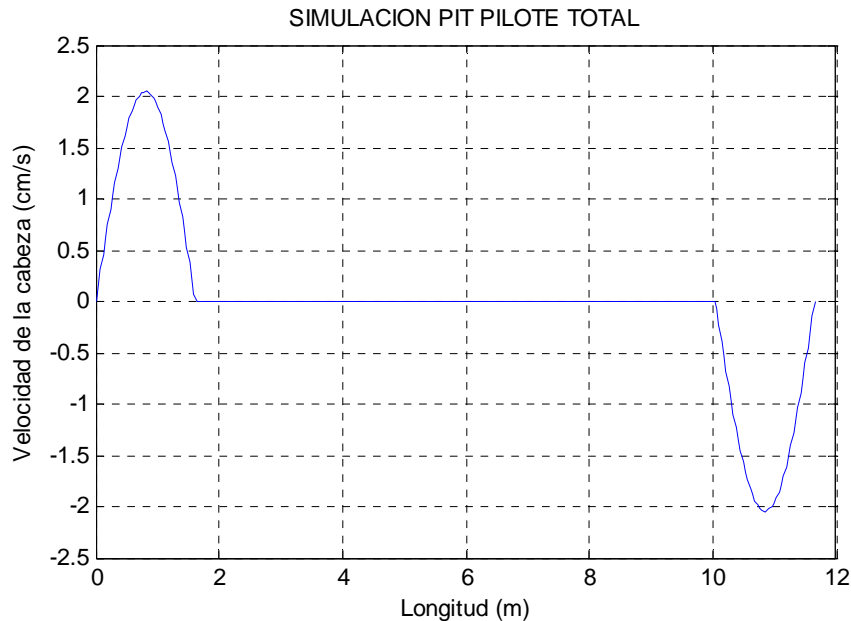


**6.4.1 Caso (a). Pilote homogéneo sin fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este caso particular se daría solamente cuando el pilote se encuentra en un medio que no restringe su movimiento como en el caso del aire o el vacío y es el caso simulado por el programa PITGRAPH para las condiciones predeterminadas anteriormente mencionadas (Ver Figura 49).

La simulación PIT genera la siguiente gráfica:

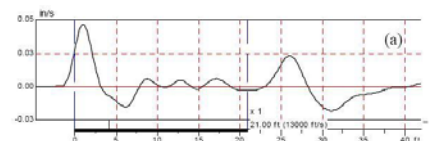


**Figura 102** Simulación Caso (a). Pilote homogéneo sin fuerzas retardantes y sin resorte  $K$  en la punta.



La simulación de la prueba para el pilote total del caso (a), muestra un pulso con una longitud de 1.61m correspondiente a la duración del pulso al impactar la cabeza del pilote ( $t_c = 2L_{\text{pulso}}/c$ ) con un tiempo de contacto  $t_c = 0.001s$  y una velocidad máxima de  $0.204\text{cm/s}$ . Al recorrer dos veces la distancia de la longitud del pilote se muestra la reflexión en la punta a una longitud de 10m de forma invertida. La inversión del pulso se debe a que dentro de las condiciones de las propiedades del suelo no está establecido ningún valor para la rigidez del suelo en la punta y por tanto dicha zona se encuentra sin restricciones. La onda reflejada por la punta del pilote para este caso, cuenta con igual amplitud y longitud que el pulso inicial incidido por el martillo.

Dado que el pilote simulado no presenta ningún cambio de impedancia a ninguna profundidad no se presenta ninguna reflexión de onda en el recorrido de la onda a lo largo del elemento.

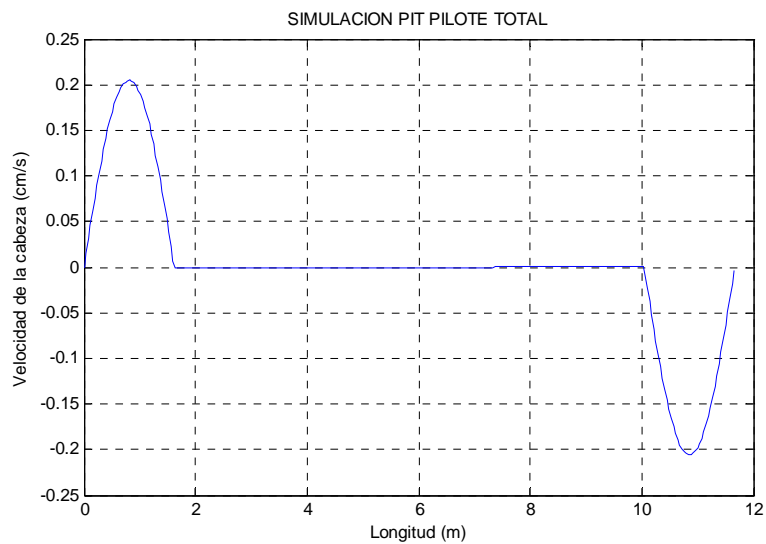




**6.4.2 Caso (b). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este caso particular se daría solamente en el caso hipotético que el pilote se encuentre en un medio que le restrinja su movimiento (suelo) y en su punta no existiera restricción alguna.

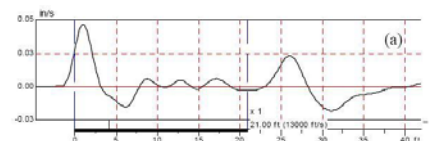
La simulación PIT genera la siguiente gráfica:

**Figura 103** Simulación Caso (b). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes ( $K_{\text{suelo}} = 9.44 \times 10^7 \text{ N/m}$ ) y sin resorte  $K$  en la punta.



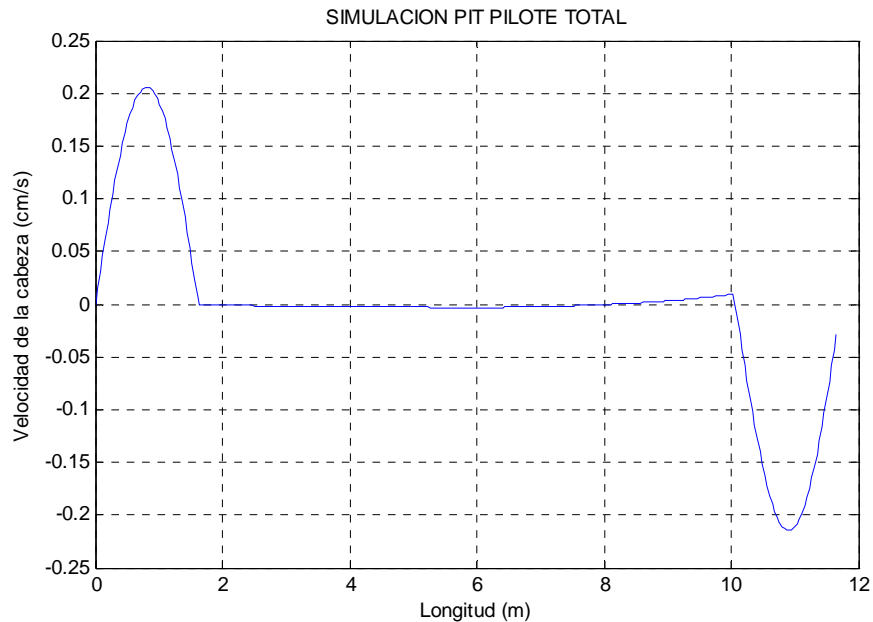
Al igual que en el caso (a) se presenta el mismo comportamiento con los mismos valores de longitud y amplitud para la onda incidente y reflejada en la punta. Se alcanza a apreciar un leve efecto de las fuerzas retardantes debidas al suelo circundante del pilote en donde en la zona que registra el viaje de la onda se presenta un aumento por encima del valor cero de la velocidad. El valor de rigidez del suelo alrededor del fuste del pilote correspondió al de una arena densa para un pilote de 0.4m de diámetro con un  $K = 1.04 \times 10^7 \text{ N/m}$  según los resultados condensados en la tabla 10.

Según la anterior simulación y dado que se utilizó el valor de rigidez del suelo para el fuste del pilote más alto que los análisis de PLAXIS, se puede observar la poca afectación de los



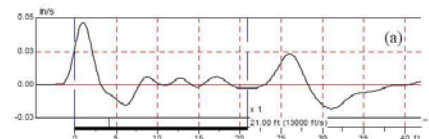
valores calculados. Al realizar otra simulación con un valor de rigidez superior a  $K=1 \times 10^8 \text{ N/m}$  se obtiene la siguiente gráfica:

**Figura 104** Simulación Caso (b). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes ( $K_{\text{suelo}} = 1.0 \times 10^8 \text{ N/m}$ ) y sin resorte  $K$  en la punta.

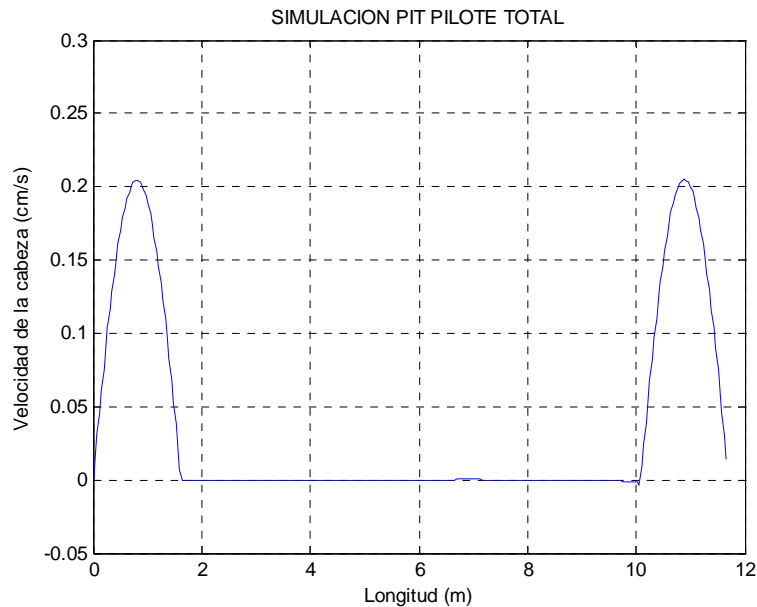


Para cuyo caso los efectos del suelo son más notorios a lo largo del fuste.

**6.4.4 Caso (c). Pilote homogéneo sin fuerzas retardantes y con resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este caso representa un pilote libre alrededor de su fuste, pero apoyado en su punta por un suelo de rigidez  $K$ . A continuación se muestra la gráfica obtenida de la simulación con los valores predeterminados.



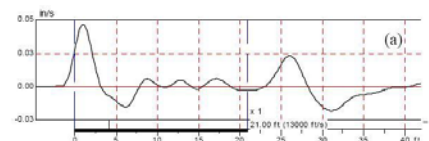
**Figura 105** Simulación Caso (c). Pilote homogéneo sin fuerzas retardantes y con resorte  $K$  en la punta ( $K_{punta}=1.0 \times 10^{11}$  N/m)



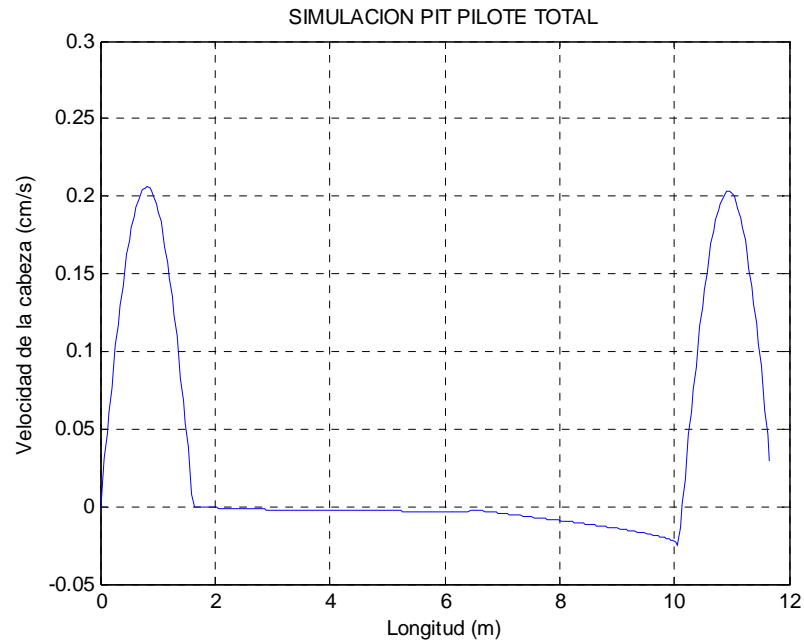
En la anterior figura se aprecia que la reflexión en la punta a una longitud de 10,0 m es positiva e igual en amplitud y longitud que el pulso generado en la cabeza. Dado a que no existen fuerzas retardantes ni cambios de impedancia a lo largo del elemento, en la zona de velocidad nula no se presenta ninguna irregularidad. El valor de rigidez del suelo en la punta del pilote debe tener un valor por encima de  $1.0 \times 10^{11}$  N/m ya que los valores obtenidos mediante el análisis en PLAXIS no generaban una reflexión positiva en dicha zona para los valores máximos calculados correspondientes al suelo clasificado como arena densa.

#### **6.4.4 Caso (d). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes y con resorte de rigidez $K$ en su punta.**

Este caso representa la condición más común e ideal en que deberían encontrarse los pilotes fundidos in situ, luego de realizar la prueba PIT ya que presentan efectos del suelo a lo largo del elemento y en la punta. A continuación se muestra la gráfica obtenida de la simulación con los valores predeterminados.

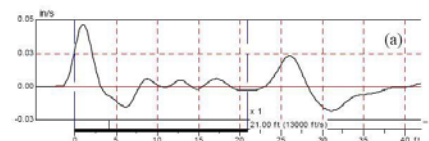


**Figura 106** Simulación Caso (d). Pilote homogéneo con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^6 \text{ N/m}$ ) y con resorte  $K$  en la punta ( $K_{punta} = 1.0 \times 10^{11} \text{ N/m}$ )

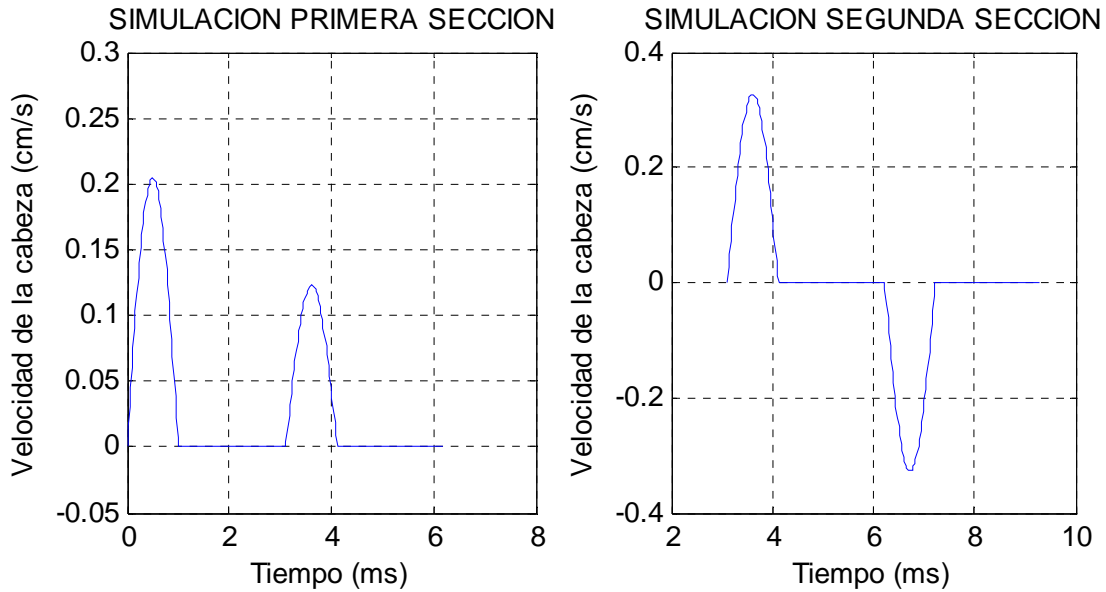


Como se muestra en la anterior figura, la velocidad máxima alcanzada en la punta del pilote ( $X=0$ ) es de aproximadamente 0.2 cm/s para la onda incidida y reflejada a la mitad del pulso. Igualmente se puede ver que la reflexión ocurre al llegar a la punta ( $\text{Longitud}=10\text{m}$ ) y que es positiva en su mayor parte. Los efectos de fuerzas retardantes debidos a la rigides  $K$  del suelo alrededor del fuste generan una caída de la velocidad por debajo de cero a medida que la onda se va propagando.

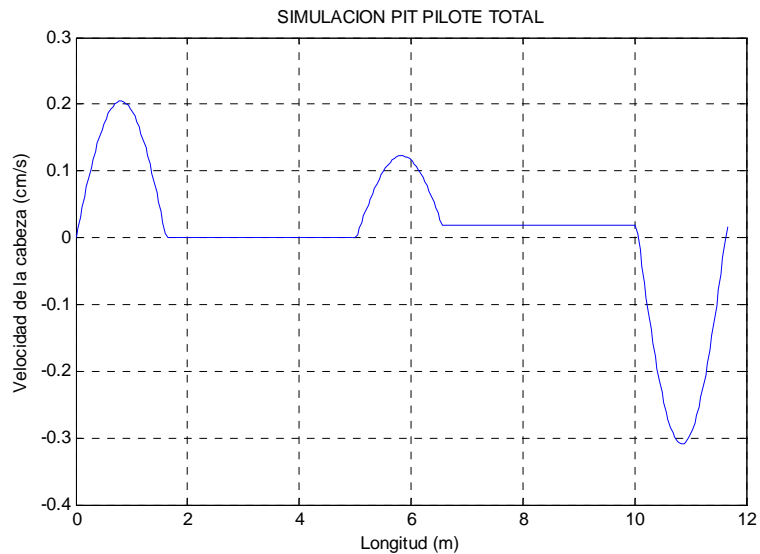
**6.4.5 Caso (e). Pilote con reducción de impedancia sin fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez  $K$  en su punta.** El caso simulado presenta el comportamiento de la prueba PIT ante una reducción de impedancia por diámetro (de  $\phi = 0.4\text{m}$  a  $\phi = 0.2\text{m}$ ) con ubicación a la mitad de la longitud del pilote predeterminando ( $X=5.0\text{m}$ ) sin efectos por rigideces del suelo. En la figura 107 se presenta la simulación de la reflexión y transmisión de onda para las secciones 1 y 2 y en la figura 108 la simulación para el pilote total.



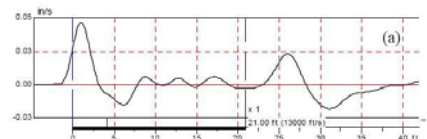
**Figura 107** Simulación Caso (e). Pilote con reducción de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte  $K$  en la punta. Secciones 1 y 2



**Figura 108** Simulación Caso (e). Pilote con reducción de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte  $K$  en la punta. Pilote Total



En la figura 107 se muestra la simulación por separado para la primera y segunda sección. En la primera sección se observa que el pulso inicial tiene la misma amplitud y tiempo de



contacto que los anteriores casos simulados pero la reflexión generada por la reducción de impedancia al disminuir la sección transversal del pilote de 0.4m a 0,2m, tiene una menor amplitud que la del pulso incidente. Dicho fenómeno se debe a la definición matemática para la reflexión de ondas en una dimensión presentada en el numeral 2.6 del presente documento y que aplicada al caso simulado se tendría el siguiente resultado:

$$\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{EA_1}{c} - \frac{EA_2}{c}}{\frac{EA_1}{c} + \frac{EA_2}{c}} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{\pi}{4}0.4^2 - \frac{\pi}{4}0.2^2}{\frac{\pi}{4}0.4^2 + \frac{\pi}{4}0.2^2} = 0.6 \quad (6.4)$$

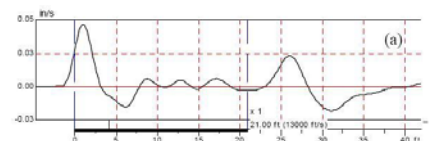
Lo cual significa que la onda reflejada para la primera sección sería el 60% de la onda incidente. Para un valor pico de velocidad para el pulso inicial de 0.2cm/s se tendría un valor pico de la onda incidente igual a 0.2cm/s\*60%=0.12cm/s que es el valor observado en la gráfica 107.

Para el caso de la segunda sección se observa un primer pulso correspondiente a la onda transmitida luego de pasar por el cambio de sección cuya magnitud está gobernada por el porcentaje de la onda incidente del siguiente resultado:

$$\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\frac{EA_1}{c}}{\frac{EA_1}{c} + \frac{EA_2}{c}} = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} = \frac{2\frac{\pi}{4}0.4^2}{\frac{\pi}{4}0.4^2 + \frac{\pi}{4}0.2^2} = 1.6 \quad (6.5)$$

Lo cual significa que la onda transmitida para la segunda sección y que se convierte en la onda incidente para la reflexión en la punta del pilote, es el 60% más que el pulso incidido para la primera sección. Lo anterior se observa en la gráfica para la segunda sección de la figura 107 en donde el valor pico alcanzado es 0.2cm/s\*160%= 0.32cm/s con valores negativos por la ausencia de apoyo del suelo.

La gráfica de la figura 108 muestra la simulación para la prueba a lo largo de todo el pilote (incluyendo las dos secciones) e indica la ubicación del defecto a una profundidad de 5.0

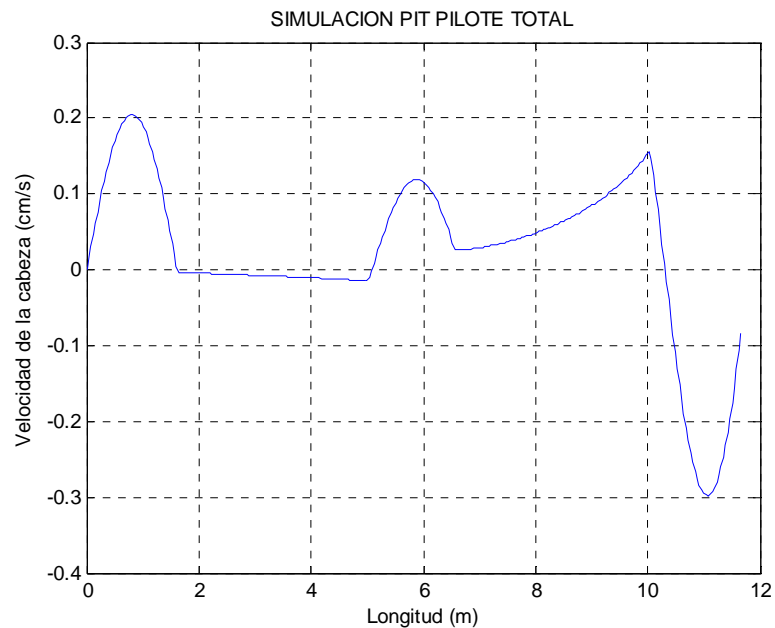


metros con la magnitud positiva de 0.12cm/s indicando una reducción de impedancia debida al cambio de sección a dicha profundidad. La reflexión en la punta es negativa debido a la inexistencia de rigidez del suelo y tiene la magnitud de 0.32 cm/s.

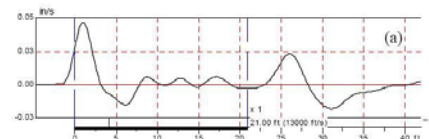
**6.4.6 Caso (f). Pilote con reducción de impedancia, con fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este caso es similar al caso (b) pero analizando las influencias que los efectos del suelo puede tener para un pilote con reducción de cambio de impedancia.

A continuación se presenta la simulación para el pilote total para tales condiciones de frontera

**Figura 109** Simulación Caso (f). Pilote con reducción de impedancia, con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^8 \text{ N/m}$ ) y sin resorte  $K$  en la punta. Pilote Total



La figura anterior muestra los mismos resultados de la figura 108 para el caso (e) pero los efectos por fuerzas retardantes se observan en la primera sección al generar un descenso de

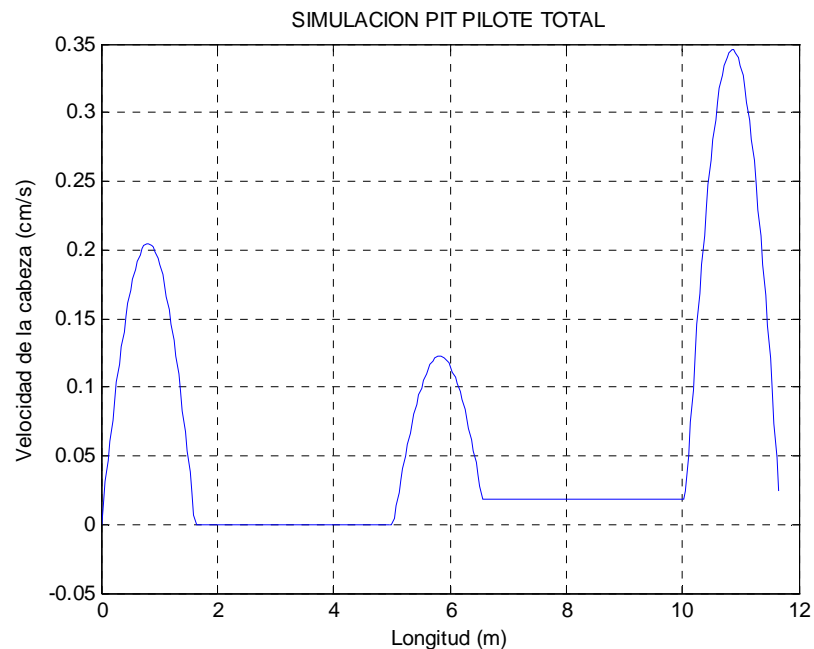


la gráfica al hacerle tomar valores negativos de la velocidad en la cabeza del pilote. Por el contrario el efecto del suelo genera un aumento gradual de velocidad para la segunda sección en donde se percibe una reflexión negativa en la punta del pilote por la inexistencia de apoyo sobre suelo.

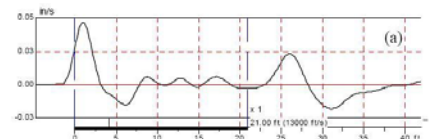
**6.4.7 Caso (g). Pilote con reducción de impedancia, sin fuerzas retardantes y con resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este caso es similar al caso (c) analizando la influencia de la existencia de un resorte en la punta (Suelo en la punta) para un pilote con reducción de cambio de impedancia.

A continuación se presenta la simulación para el pilote total para tales condiciones de frontera.

**Figura 110** Simulación Caso (g). Pilote con reducción de impedancia, sin fuerzas retardantes y con resorte  $K$  en la punta ( $K_{punta}=1.0 \times 10^{11} \text{ N/m}$ ). Pilote Total



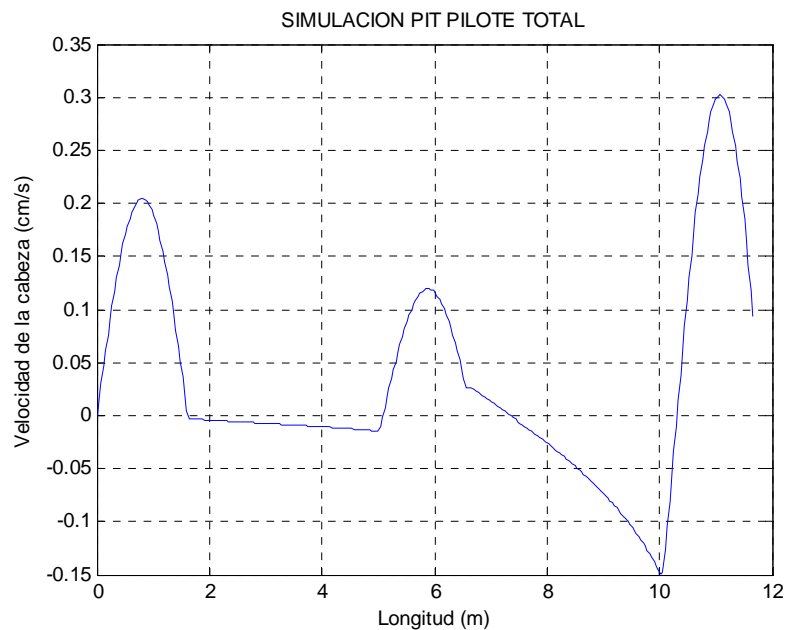
Para este caso, se observa que todas las reflexiones son positivas y que mantienen los valores analizados para el caso (e).



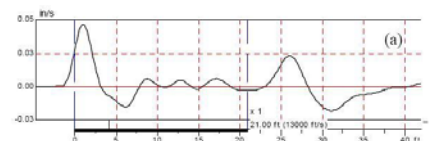


**6.4.8 Caso (h). Pilote con reducción de impedancia, con fuerzas retardantes y con resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este último caso dentro de los anteriormente descritos para el pilote con reducción de impedancia, corresponde al caso comparable con las condiciones reales del suelo y la existencia de un defecto a una profundidad determinada. La siguiente es la simulación alcanzada para dicho caso:

**Figura 111** Simulación Caso (h). Pilote con reducción de impedancia, con fuerzas retardantes (Ksuelo =  $1.0 \times 10^9 \text{ N/m}$ ) y con resorte  $K$  en la punta ( $K_{\text{punta}} = 1.0 \times 10^{11} \text{ N/m}$ ). Pilote Total

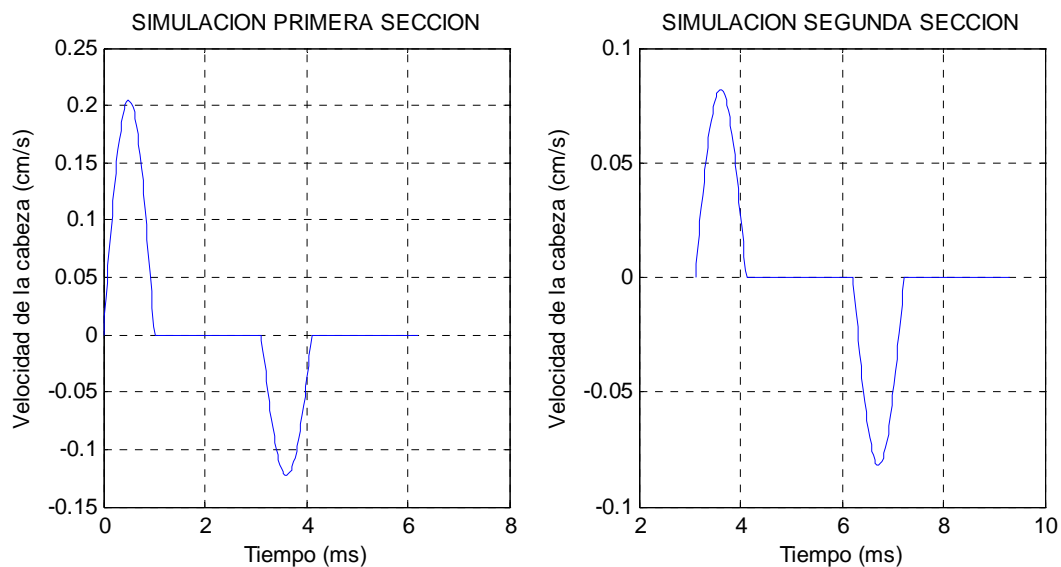


El resultado presentado en la anterior gráfica muestra como en ambas secciones los efectos del suelo generan una reducción en la velocidad mientras la onda va viajando y encuentra el cambio de impedancia ( $X=5.0\text{m}$ ) y la reflexión positiva en la punta debida al apoyo del suelo. Igualmente los se puede ver que los efectos del suelo son mayores para la segunda sección debido a que ésta tiene un menor diámetro con respecto a la anterior.

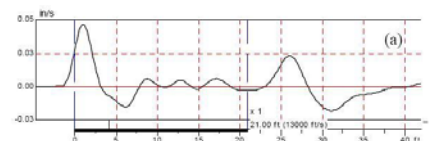


**6.4.9 Caso (i). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este caso es similar al simulado para las condiciones del caso (e) pero en vez de existir una reducción de impedancia a una profundidad de 5.0m el diámetro aumenta (de  $\phi= 0.4\text{m}$  a  $\phi=0.8\text{m}$ ) y genera diferentes valores de reflexión y transmisión de ondas. En la figura 112 se presenta la simulación de la reflexión y transmisión de onda para las secciones 1 y 2 y en la figura 113 la simulación para el pilote total.

**Figura 112** Simulación Caso (i). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte  $K$  en la punta. Secciones 1 y 2



En la figura 112 se muestra por separado la simulación para la primera y segunda sección. En la primera sección se observa que el pulso inicial tiene la misma amplitud y tiempo de contacto que los anteriores casos simulados pero la reflexión generada por el aumento de impedancia al aumentar la sección transversal del pilote de 0.4m a 0,8m, tiene una menor amplitud que la del pulso incidente y es de forma invertida. Dicho fenómeno se debe a la definición matemática para la reflexión de ondas en una dimensión presentada en el numeral 2.6 del presente documento y que aplicada al caso (i) y los siguientes, se tendría el siguiente resultado:



$$\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{EA_1}{c} - \frac{EA_2}{c}}{\frac{EA_1}{c} + \frac{EA_2}{c}} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{\pi}{4}0.4^2 - \frac{\pi}{4}0.8^2}{\frac{\pi}{4}0.4^2 + \frac{\pi}{4}0.8^2} = -0.6 \quad (6.6)$$

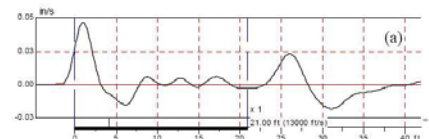
Lo cual significa que la onda reflejada para la primera sección sería el 60% de la onda incidente y con valores negativos. Para un valor pico de velocidad para el pulso inicial de 0.2cm/s se tendría un valor pico de la onda incidente igual a 0.2cm/s\*-60%=-0.12cm/s que es el valor observado en la gráfica 112.

Para el caso de la segunda sección se observa un primer pulso correspondiente a la onda transmitida luego de pasar por el cambio de sección cuya magnitud está gobernada por el porcentaje de la onda incidente del siguiente resultado:

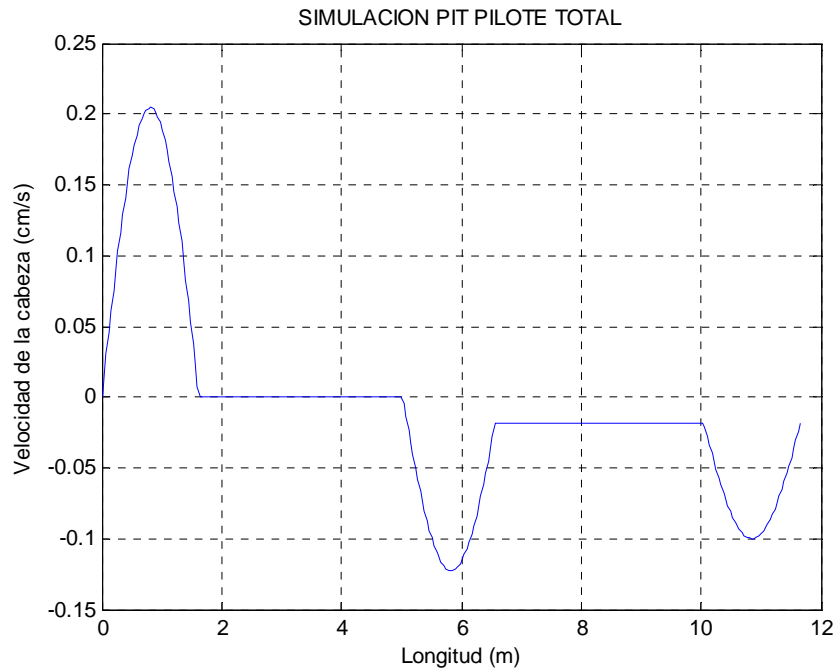
$$\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\frac{EA_1}{c}}{\frac{EA_1}{c} + \frac{EA_2}{c}} = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} = \frac{2\frac{\pi}{4}0.4^2}{\frac{\pi}{4}0.4^2 + \frac{\pi}{4}0.8^2} = 0.4 \quad (6.7)$$

Lo cual significa que la onda transmitida para la segunda sección y que se convierte en la onda incidente para la reflexión en la punta del pilote, es el 40% del pulso incidido para la primera sección. Lo anterior se observa en la gráfica para la segunda sección de la figura 112 en donde el valor pico alcanzado es 0.2cm/s\*40%= 0.08cm/s con valores negativos por la ausencia de apoyo del suelo.

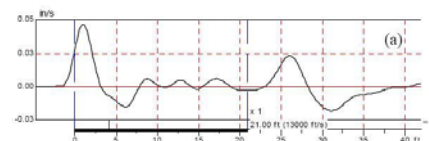
La gráfica de la figura 95 muestra la simulación para la prueba a lo largo de todo el pilote (incluyendo las dos secciones) e indica la ubicación del defecto a una profundidad de 5.0 metros con la magnitud negativa de 0.12cm/s indicando el aumento de impedancia debida al cambio de sección a dicha profundidad. La reflexión en la punta es negativa debido a la inexistencia de rigidez del suelo y tiene una magnitud de 0.08 cm/s.



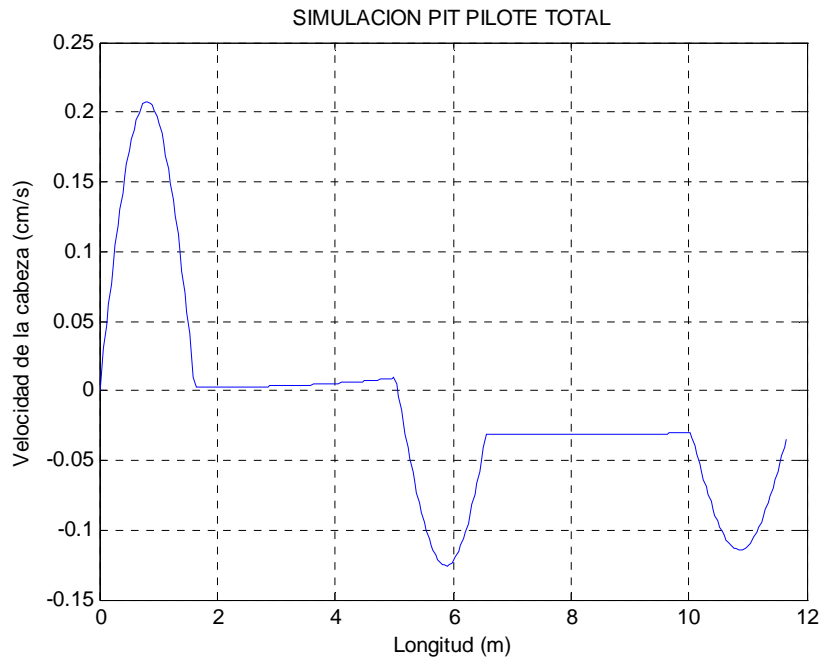
**Figura 113** Simulación Caso (i). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y sin resorte  $K$  en la punta. Pilote Total



**6.4.10 Caso (j). Pilote con aumento de impedancia, con fuerzas retardantes y sin resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este caso es similar al caso (f) pero con aumento de impedancia a la misma profundidad. Los resultados de la simulación se muestran en la siguiente figura.



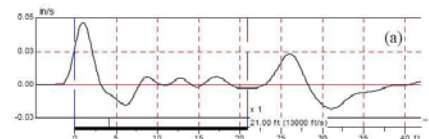
**Figura 114** Simulación Caso(j). Pilote con aumento de impedancia, con fuerzas retardantes  
 ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^8 \text{ N/m}$ ) y sin resorte  $K$  en la punta. Pilote Total



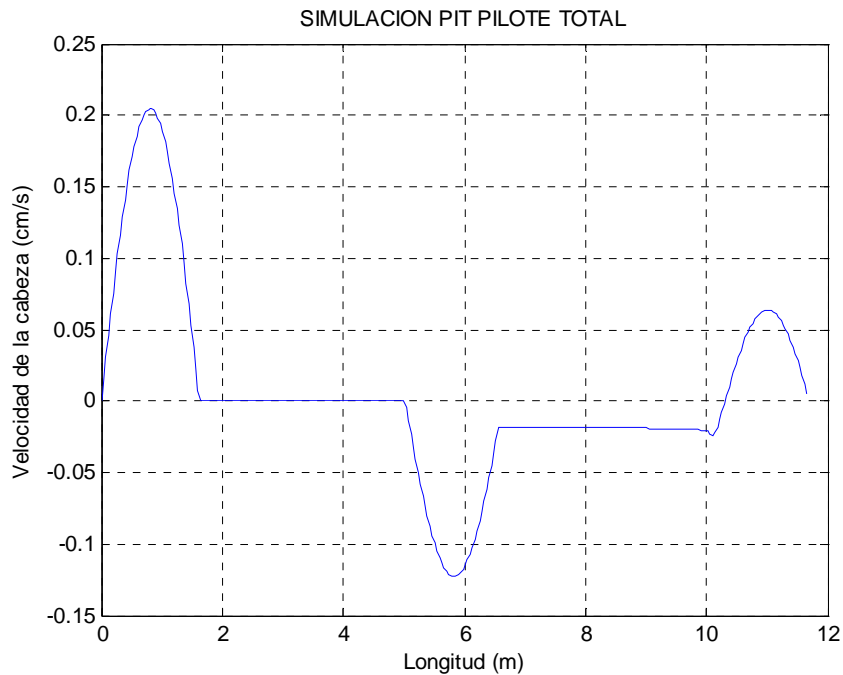
La gráfica muestra que el cambio de impedancia genera una reflexión negativa de la velocidad, lo cual corresponde a lo esperado para un aumento de la sección transversal del pilote y que los efectos del suelo generan en ambas secciones un leve incremento de la velocidad evaluada en la cabeza del pilote. Las reflexiones, tanto para el cambio de sección como para la punta del pilote presentan los mismos valores máximos analizados en el caso anterior según la teoría de reflexión y transmisión de ondas en una dimensión.

**6.4.11 Caso (k). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y con resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este caso presenta las mismas condiciones del caso (g) pero con un aumento en la sección transversal del pilote a la misma profundidad.

La siguiente figura presenta el resultado de la simulación.

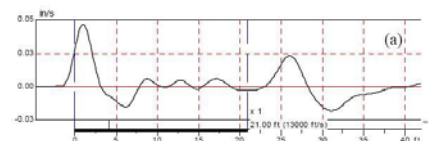


**Figura 115** Simulación Caso (k). Pilote con aumento de impedancia, sin fuerzas retardantes y con resorte  $K$  en la punta ( $K_{punta}=1.0 \times 10^{11} \text{ N/m}$ ). Pilote Total

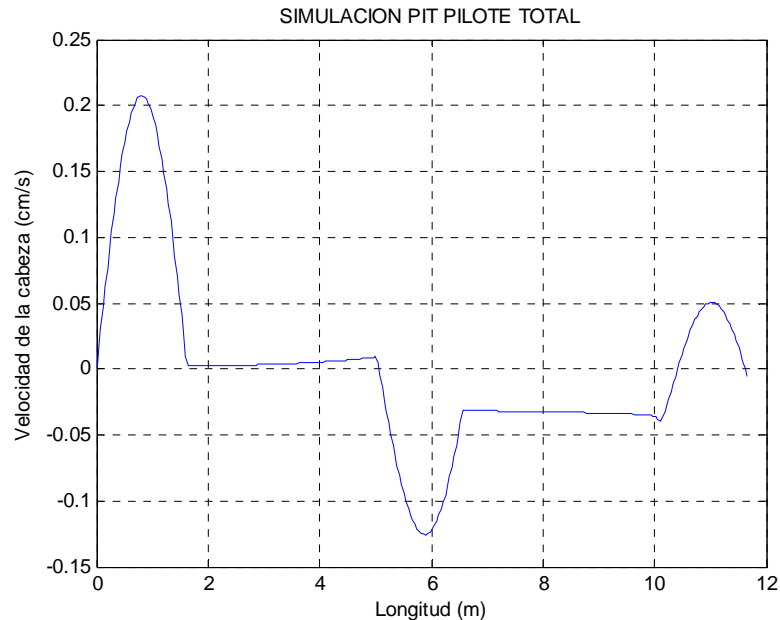


Para este caso, los órdenes de magnitud para las reflexiones por cambio de sección transversal y punta mantienen los valores analizados para el caso (i). Dado que no existen fuerzas que afecten el movimiento de la onda a lo largo de la propagación de la misma, en las zonas homogéneas del pilote el valor de la velocidad permanece constante. De igual manera como se ha venido analizando, la presencia de suelo en la punta genera una reflexión positiva del pulso.

**6.4.12 Caso (l). Pilote con aumento de impedancia, con fuerzas retardantes y con resorte de rigidez  $K$  en su punta.** Este caso es representado las condiciones reales en las que se encontraría un pilote bajo el suelo ante un aumento de impedancia a una profundidad determinada desde el punto de aplicación del pulso. La siguiente figura muestra la simulación obtenida mediante el programa PITGRAPH con los valores de rigidez relacionados.



**Figura 116** Simulación Caso (I). Pilote con aumento de impedancia, con fuerzas retardantes ( $K_{suelo} = 1.0 \times 10^8 \text{ N/m}$ ) y con resorte  $K$  en la punta ( $K_{punta} = 1.0 \times 10^{11} \text{ N/m}$ ). Pilote Total



La simulación muestra la ubicación y magnitudes de las reflexiones de acuerdo a los análisis hechos para el caso (i) y adicionalmente se muestran los efectos del suelo y reflexión positiva en la punta. Para la primera sección se aprecia un leve aumento en la velocidad a lo largo de la zona de diámetro constante y para la segunda sección una leve disminución de la velocidad son generados por los efectos del suelo.

**6.4.13 Efectos de Amortiguamiento causados por el material del pilote.** En esta sección se presentan los resultados de las simulaciones para los casos más próximos a las condiciones de los pilotes bajo la superficie afectados por valores de amortiguamiento desde la interfaz gráfica del programa PITGRAPH.

Los siguientes son los resultados considerando un amortiguamiento mínimo de  $1 \times 10^5 \text{ kg/s}$ .

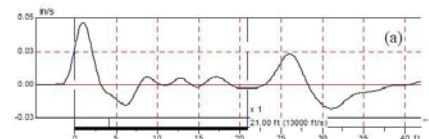


Figura 117 Caso (d) con efectos de amortiguamiento por el material del pilote

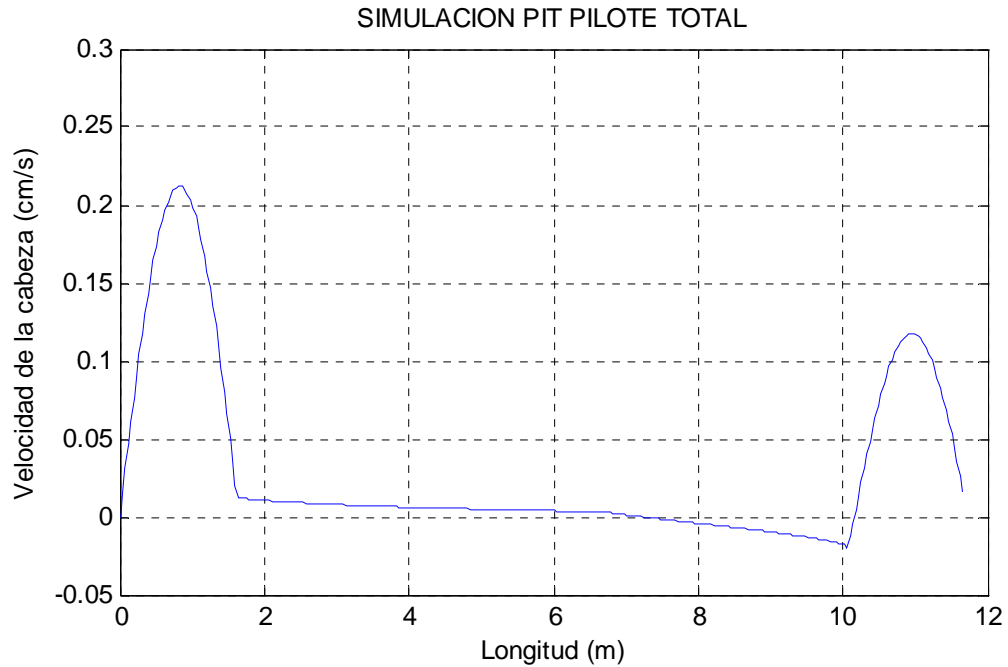


Figura 118 Caso (h) con efectos de amortiguamiento por el material del pilote

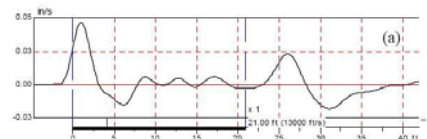
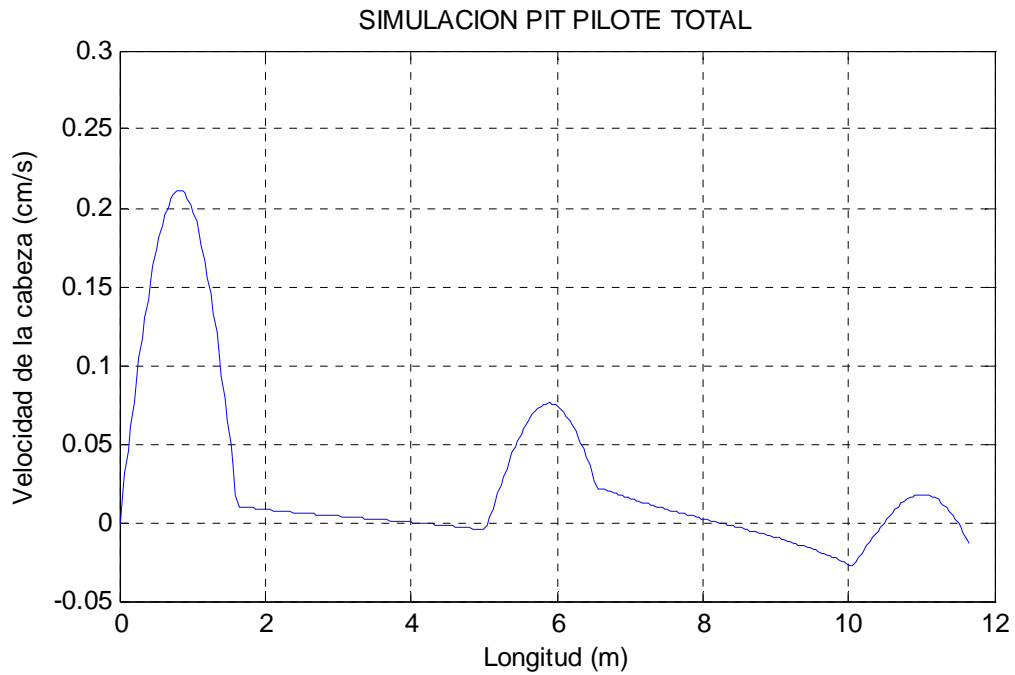
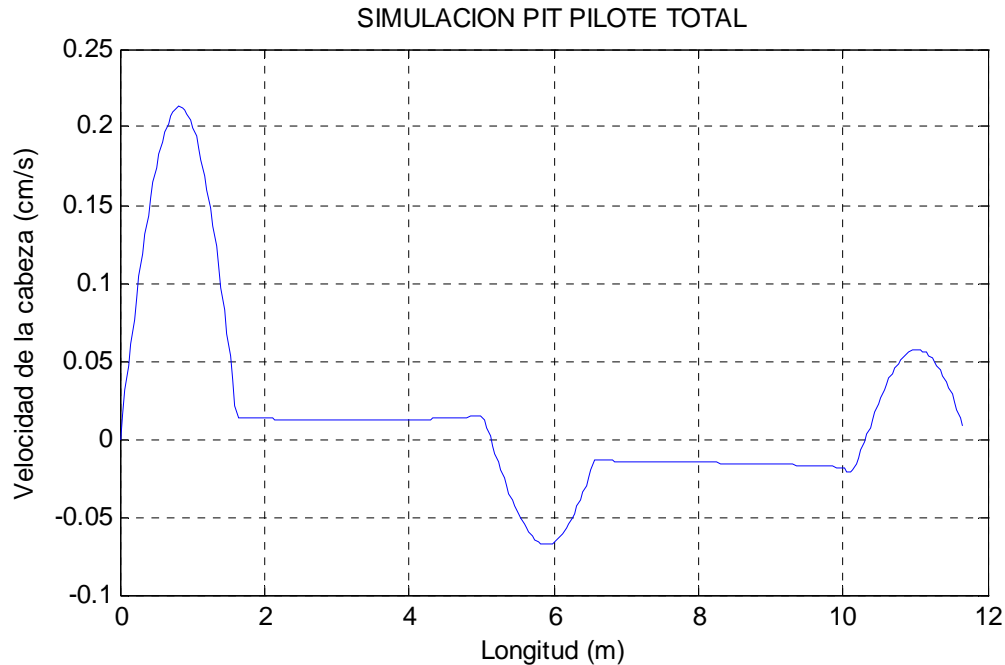


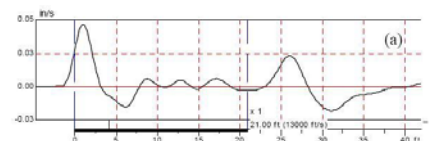


Figura 119 Caso (I) con efectos de amortiguamiento por el material del pilote



En todas las simulaciones los valores pico de las reflexiones debidas a los cambios de impedancia y reflexión en la punta fueron menores que los valores de los mismos casos sin efectos de amortiguamiento.

El valor de amortiguamiento no fue posible compararlo con algún tipo de modelo, como si se pudo realizar para la obtención de rigideces de diferentes tipos de suelo a lo largo del fuste del pilote y en la punta mediante PLAXIS. Aunque se sabe que la señal a medida que va viajando va decreciendo de forma exponencial (Ver numeral 1.5.1) se hace necesario incorporar el valor de amortiguamiento para el programa PITGRAPH mediante calibración de acuerdo a las condiciones de la señal que se quiera comparar.



## 6.5 RESULTADOS DE PRUEBAS DE CAMPO Y COMPARACIÓN CON SIMULACIONES DEL PROGRAMA PITGRAPH

En ésta sección se presentarán algunas pruebas reales llevadas a cabo por la ingeniera Erika Velandia IC, MIC y el ingeniero Jorge Alberto Rodríguez IC, MSCE, PhD por medio del equipo PIT de la fabrica Pyle Dynamics, Inc. y que fueron suministradas para su análisis y comparación con las simulaciones del programa PITGRAPH

**6.5.1 Pilotes defectuosos en la obra Carrefour Suba.** En el informe final suministrado se describen los resultados de pruebas PIT realizados a diez pilotes para dicha obra. En particular existen dos pilotes que presentan defectos identificados con los números 108 y 145 respectivamente.

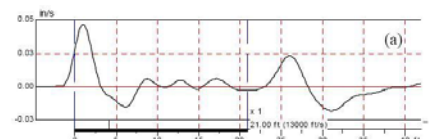
Para todos los pilotes se tuvo el registro de construcción que se muestra en la siguiente tabla:

*Tabla 11 Registro de construcción de los pilotes analizados. Obra Carrefour Suba.*

Pilote No	Longitud de ensayo (m)	Volumen teórico (m <sup>3</sup> )	Volumen real (m <sup>3</sup> )
145	23.3	3.02	4.46
118	23.33	3.02	3.09
190	23.35	3.02	3.20
245	23.31	3.02	3.31
141	23.34	3.02	3.06
108	23.30	3.02	3.75
292	23.37	3.02	3.06
291	23.31	3.02	3.06
55	23.39	3.02	3.06
63	23.36	3.02	3.06

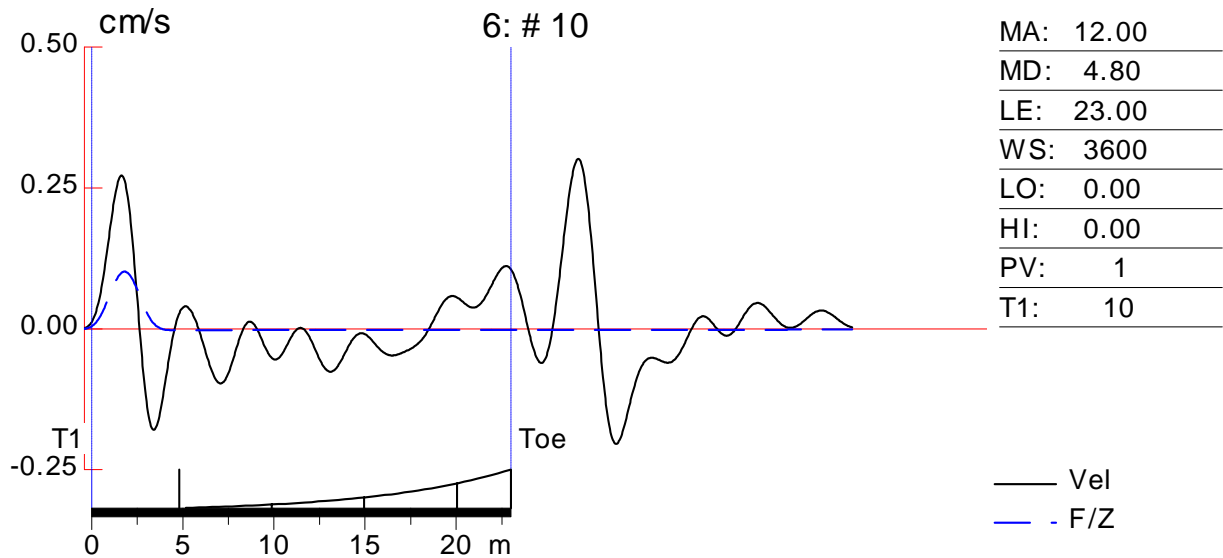
*Fuente: Informe Final PIT. Carrefour Suba*

En dicha tabla se observa que el volumen real fue siempre superior al teórico y en particular los pilotes No 145 y 108 presentaron un incremento notorio del volumen de concreto vaciado para su construcción indicando posibles defectos.



En cuanto al pilote 145 se pudo identificar un aumento de impedancia entre 3.0 y 5.0 metros. El registro PIT de la señal de respuesta luego de realizar la prueba se muestra a continuación.

*Figura 120 Señal PIT para pilote 145. Carrefour Suba*



*Fuente: Registro programa PIT-W*

Los valores de los distintos parámetros del pilote 145 se presentan a continuación:

*Tabla 12 Parámetros del pilote 145. Carrefour Suba*

PROPIEDAD	VALOR	UNIDADES
Longitud	23	m
Diámetro Nominal	0.4	m
Velocidad de Onda (c)	3600	m/s
Densidad concreto ( $\rho$ )	2400	kg/m <sup>3</sup>
Módulo de Elasticidad (E)	31.1	GPa

*Fuente: Valores Programa PIT-W*

La simulación que se realizó mediante el programa PITGRAPH para las condiciones del pilote 145 se presenta en la interfaz gráfica a continuación:

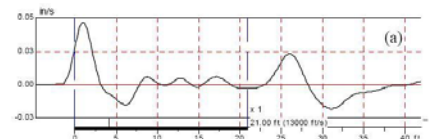
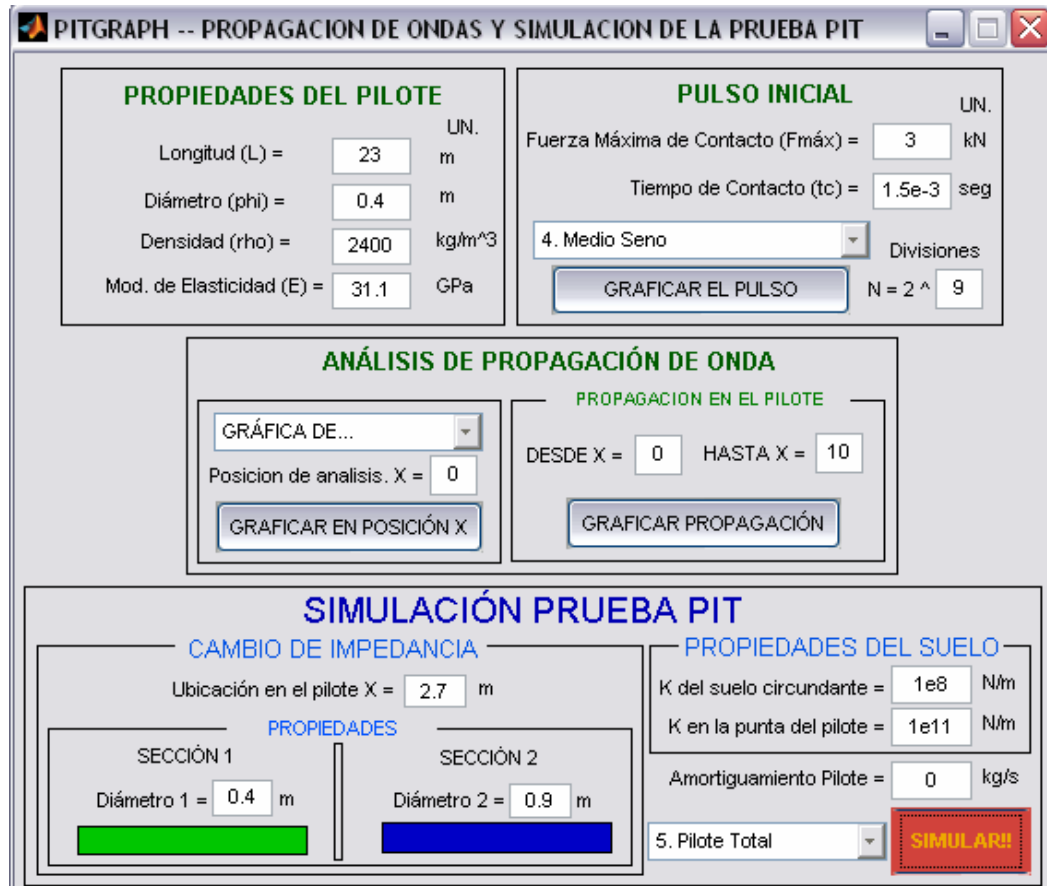


Figura 121 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 145.  
 Carrefour Suba.



**PITGRAPH -- PROPAGACION DE ONDAS Y SIMULACION DE LA PRUEBA PIT**

**PROPIEDADES DEL PILOTE**

Longitud (L) = 23 m  
 Diámetro (phi) = 0.4 m  
 Densidad (rho) = 2400 kg/m<sup>3</sup>  
 Mod. de Elasticidad (E) = 31.1 GPa

**PULSO INICIAL**

Fuerza Máxima de Contacto (F<sub>máx</sub>) = 3 kN  
 Tiempo de Contacto (tc) = 1.5e-3 seg  
 4. Medio Seno  
 Divisiones N = 2 ^ 9

**ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE ONDA**

GRÁFICA DE...  
 Posicion de analisis. X = 0  
 DESDE X = 0 HASTA X = 10

**SIMULACIÓN PRUEBA PIT**

**CAMBIO DE IMPEDANCIA**  
 Ubicación en el pilote X = 2.7 m

**PROPIEDADES DEL SUELO**  
 K del suelo circundante = 1e8 N/m  
 K en la punta del pilote = 1e11 N/m  
 Amortiguamiento Pilote = 0 kg/s

**PROPIEDADES**

SECCIÓN 1: Diámetro 1 = 0.4 m  
 SECCIÓN 2: Diámetro 2 = 0.9 m

5. Pilote Total **SIMULAR!!**

Se calibró el pulso de entrada con una fuerza máxima de contacto de 3kN para obtener un valor pico de velocidad de 0.26cm/s e igualmente se calibró el tiempo de contacto a un valor de 0.0015s para obtener una longitud del pulso de entrada de 2.5 m. Con éstos parámetros para la generación del pulso inicial e identificando la ubicación del defecto con mayor precisión a 2.7m por debajo de la cabeza del pilote, se procedió a calibrar el diámetro del aumento de impedancia para obtener una reflexión con un valor máximo de velocidad 0.18cm/s. La gráfica obtenida para dicha simulación se presenta en la siguiente figura.

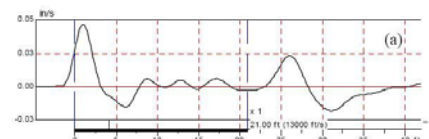
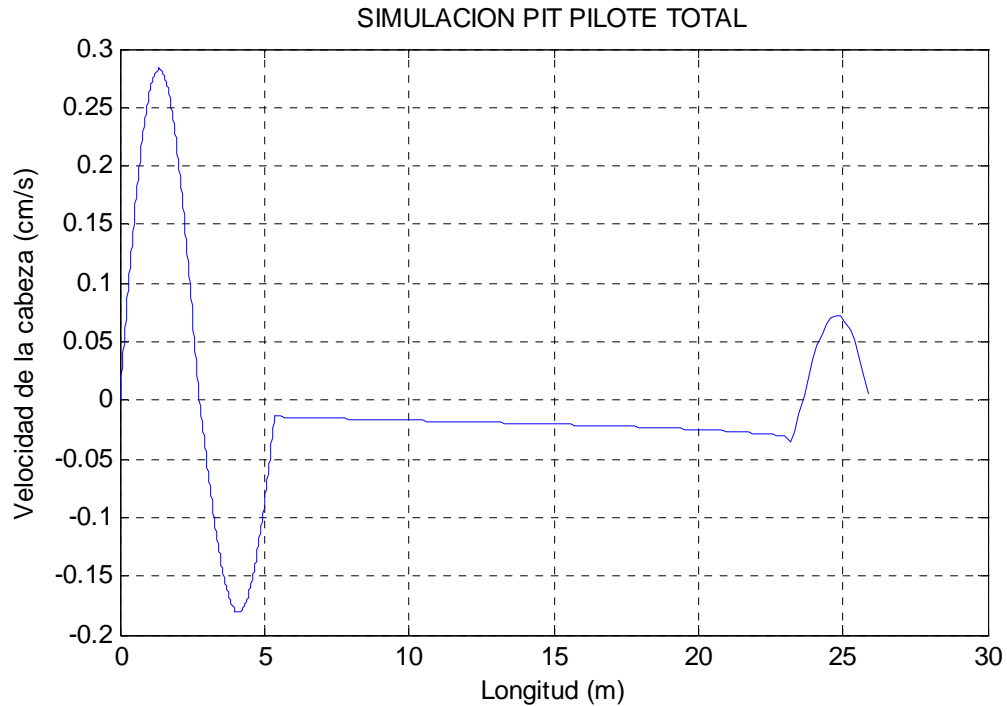
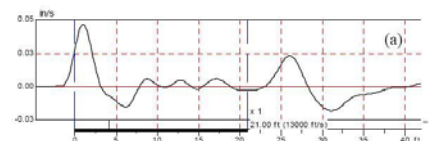


Figura 122 Simulación de la prueba PIT para el pilote 145 mediante el programa PITGRAPH



Al comparar la señal obtenida en la prueba y la generada por la simulación en el programa, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- La magnitud de la fuerza debida al impacto del matillo en la punta fue de 3kN.
- La duración del pulso inicial es de 0.0015 segundos.
- El defecto se encuentra ubicado a una profundidad de 2.7m
- El diámetro correspondiente al aumento de impedancia a 2.7m de profundidad es de aproximadamente 0.9m
- Los efectos debidos a la rigidez del suelo que rodea el fuste del pilote son de mínimo  $1 \times 10^8$  N/m
- El valor mínimo de rigidez del suelo en la punta para la reflexión positiva de la velocidad es de  $1 \times 10^{11}$  N/m.

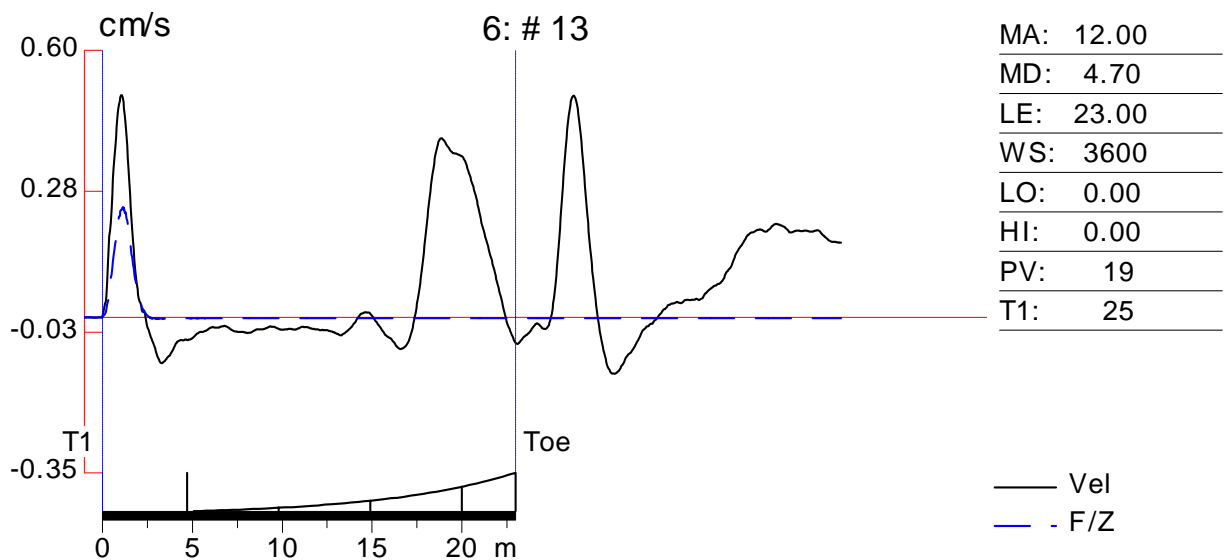


Igualmente se puede observar que mientras la señal real presenta después del registro del defecto una señal armónica causada por el rebote de la onda entre la cabeza y aumento de diámetro, la gráfica de la simulación tan solo presenta una reflexión para tal defecto.

La presencia de un aumento de diámetro para el pilote 145 explica el por qué presenta un volumen real de vaciado de concreto tan alto respecto al volumen teórico de construcción (expansión del 48%). Dicha situación no representa problemas de tipo estructural para el pilote.

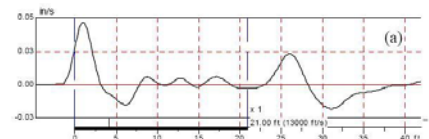
Para el pilote 108 se pudo identificar una disminución de impedancia a 18.0 metros de profundidad. El registro PIT de la señal al realizar la prueba se muestra a continuación.

*Figura 123 Señal PIT para pilote108. Carrefour Suba*



*Fuente: Registro programa PIT-W*

Los valores de los distintos parámetros del pilote 108 se presentan a continuación:



*Tabla 13 Parámetros del pilote 108. Carrefour Suba*

PROPIEDAD	VALOR	UNIDADES
Longitud	23	m
Diámetro Nominal	0.4	m
Velocidad de Onda (c)	3600	m/s
Densidad concreto ( $\rho$ )	2400	kg/m <sup>3</sup>
Módulo de Elasticidad (E)	31.1	GPa

*Fuente: Valores Programa PIT-W*

Haciendo uso del método beta se pudo obtener de manera aproximada, el porcentaje de reducción del área en el sector del defecto. Se puede calcular el factor alfa definido en la ecuación (1.2) del presente documento y por tanto se tiene que:

$$\alpha = \frac{V_{daño}}{V_{impacto}} = \frac{0.3 \text{ cm/s}}{0.5 \text{ cm/s}} = 0.6 \quad (6.8)$$

Teniendo la definición del porcentaje de reducción del área por la ecuación (1.3), se calcula el factor beta de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{1-0.6}{1+0.6} = 0.25 \quad (6.9)$$

El área en la zona del daño tiene un área mínima del 25 % del área normal del pilote, es decir existe una reducción del área del pilote de aproximadamente el 75% con respecto al área normal del pilote, en la zona del defecto detectado. Lo anterior significaría que el diámetro mínimo en dicha zona es de 0.2m

La simulación que se realizó mediante el programa PITGRAPH para las condiciones del pilote 108 se muestra en la interfaz gráfica a continuación:

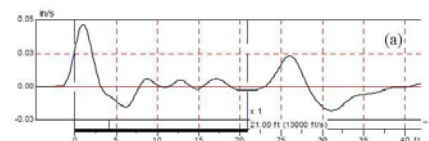
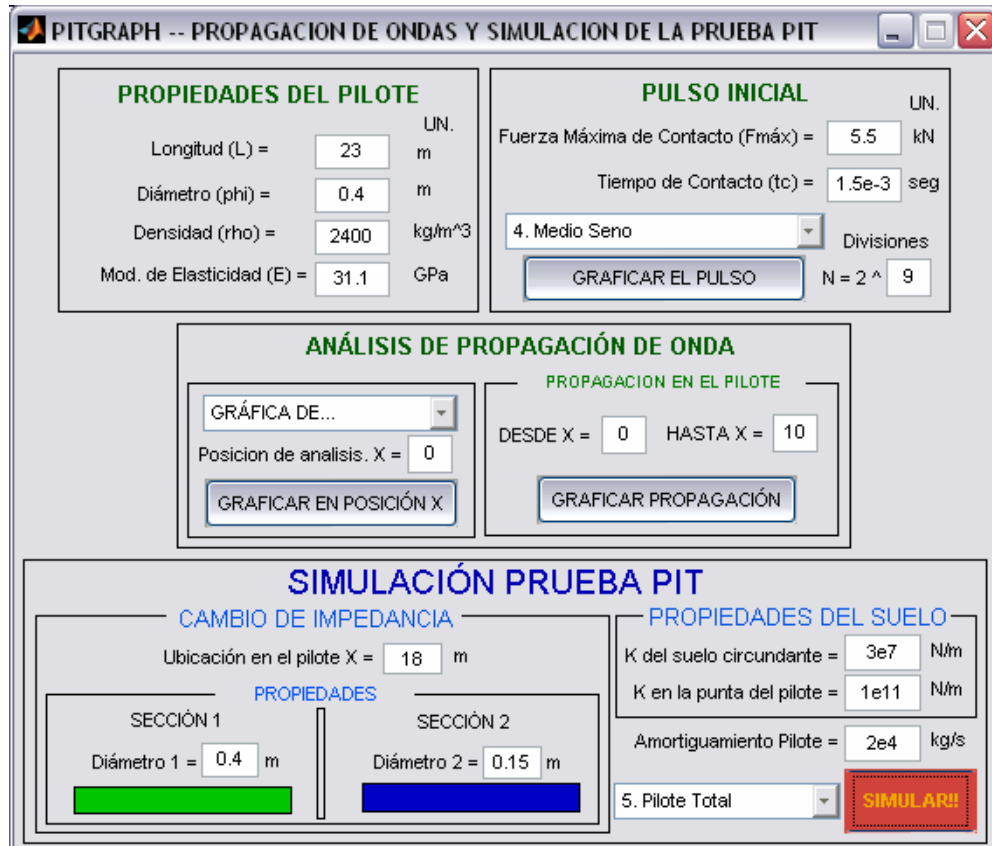


Figura 124 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 108.  
 Carrefour Suba.



**PITGRAPH -- PROPAGACION DE ONDAS Y SIMULACION DE LA PRUEBA PIT**

**PROPIEDADES DEL PILOTE**

Longitud (L) = 23 m UN.

Diámetro (phi) = 0.4 m

Densidad (rho) = 2400 kg/m<sup>3</sup>

Mod. de Elasticidad (E) = 31.1 GPa

**PULSO INICIAL**

Fuerza Máxima de Contacto (F<sub>máx</sub>) = 5.5 kN UN.

Tiempo de Contacto (tc) = 1.5e-3 seg

4. Medio Seno

Divisiones N = 2 ^ 9

GRAFICAR EL PULSO

**ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE ONDA**

GRÁFICA DE...

Posicion de analisis. X = 0

GRAFICAR EN POSICIÓN X

**PROPAGACION EN EL PILOTE**

DESDE X = 0 HASTA X = 10

GRAFICAR PROPAGACIÓN

**SIMULACIÓN PRUEBA PIT**

**CAMBIO DE IMPEDANCIA**

Ubicación en el pilote X = 18 m

**PROPIEDADES**

SECCIÓN 1

Diámetro 1 = 0.4 m

SECCIÓN 2

Diámetro 2 = 0.15 m

**PROPIEDADES DEL SUELO**

K del suelo circundante = 3e7 N/m

K en la punta del pilote = 1e11 N/m

Amortiguamiento Pilote = 2e4 kg/s

5. Pilote Total

**SIMULAR!!**

Se calibró el pulso de entrada con una fuerza máxima de contacto de 5.5kN para obtener un valor pico de velocidad de 0.5cm/s e igualmente se calibró el tiempo de contacto a un valor de 0.0015s para obtener una longitud del pulso de entrada de 2.5m. Con éstos parámetros para la generación del pulso inicial e identificando la ubicación del defecto a 18.0m por debajo de la cabeza del pilote, se procedió a calibrar el diámetro de la disminución de impedancia para obtener una reflexión con un valor máximo de velocidad 0.25cm/s. La gráfica obtenida para dicha simulación se presenta en la siguiente figura.

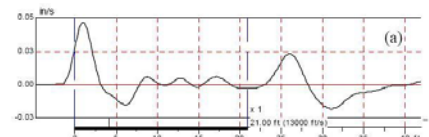
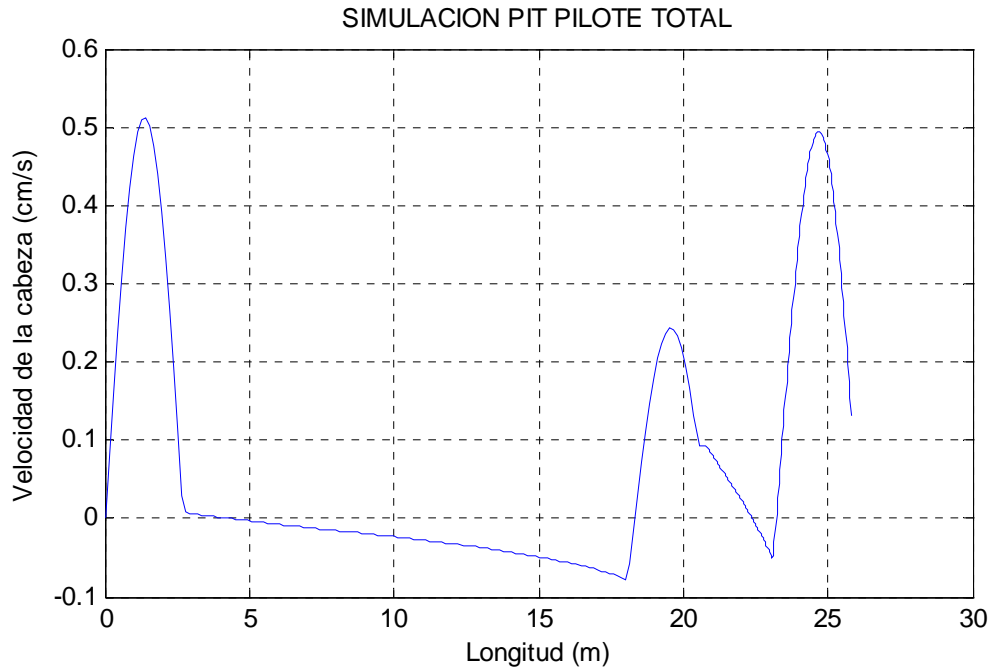


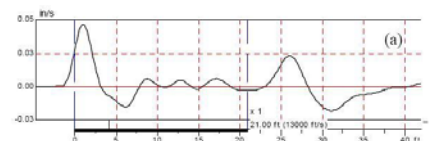


Figura 125 Simulación de la prueba PIT para el pilote 108 mediante el programa PITGRAPH



Al comparar la señal obtenida en la prueba y la generada por la simulación en el programa, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- La magnitud de la fuerza debida al impacto del matillo en la punta fue de 5.5kN.
- La duración del pulso inicial es de 0.0015 segundos.
- El defecto se encuentra ubicado a una profundidad de 18.0m
- El diámetro correspondiente a la disminución de impedancia a 18.0m de profundidad es de aproximadamente 0.15m. El estimado mediante el método beta es de 0.2m
- Los efectos debidos a la rigidez del suelo que rodea el fuste del pilote son de mínimo  $3 \times 10^7$  N/m
- El valor mínimo de rigidez del suelo en la punta para la reflexión positiva de la velocidad es de  $1 \times 10^{11}$  N/m.
- El valor calibrado para el amortiguamiento de la señal en el pilote es de aproximadamente  $2 \times 10^4$  kg/s.

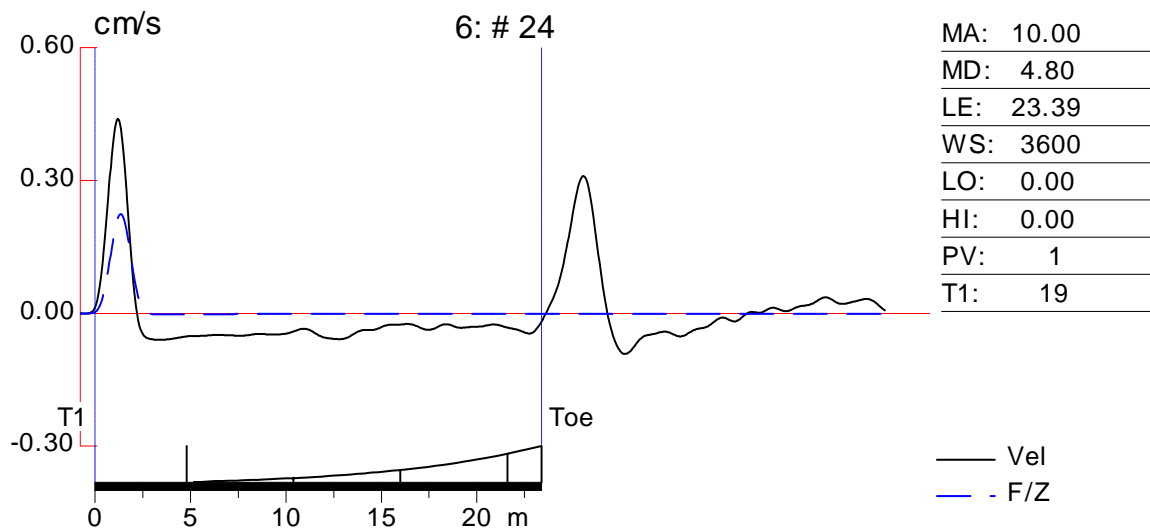


El pilote 108 debido al análisis de los resultados se recomendó que fuera evaluado por el ingeniero estructural y geotecnista, para estudiar su comportamiento durante las cargas de trabajo que debía soportar.

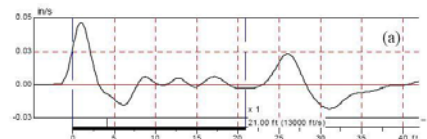
**6.5.2 Pilotes homogéneos en la obra Carrefour Suba.** En el informe final de las pruebas PIT realizadas para dicha obra igualmente se presentan pilotes con una excelente señal de respuesta y por tanto no presentan ningún defecto de consideración.

Los pilotes 55 y 63 presentaron señales muy claras del pulso de entrada y reflexión en la punta. Los registros de la prueba se muestran a continuación.

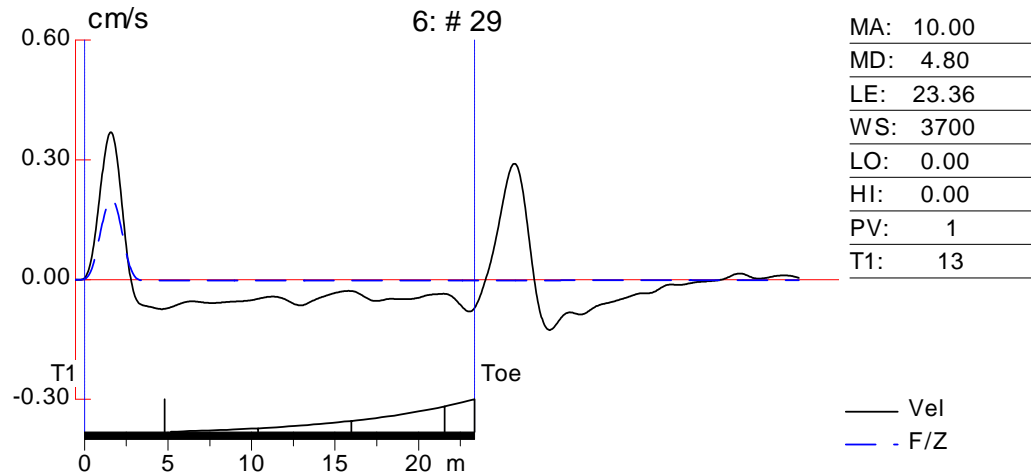
*Figura 126 Señal PIT para pilote 55. Carrefour Suba*



*Fuente: Registro programa PIT-W*



*Figura 127 Señal PIT para pilote 63. Carrefour Suba*



*Fuente: Registro programa PIT-W*

Los valores de los distintos parámetros de los pilotes 55 y 63 se presentan a continuación:

*Tabla 14 Parámetros del pilote 55. Carrefour Suba*

PROPIEDAD	VALOR	UNIDADES
Longitud	23.0	m
Diámetro Nominal	0.4	m
Velocidad de Onda (c)	3600	m/s
Densidad concreto ( $\rho$ )	2400	kg/m <sup>3</sup>
Módulo de Elasticidad (E)	31.1	GPa

*Fuente: Valores Programa PIT-W*

*Tabla 15 Parámetros del pilote 63. Carrefour Suba*

PROPIEDAD	VALOR	UNIDADES
Longitud	23.4	m
Diámetro Nominal	0.4	m
Velocidad de Onda (c)	3700	m/s
Densidad concreto ( $\rho$ )	2400	kg/m <sup>3</sup>
Módulo de Elasticidad (E)	32.9	GPa

*Fuente: Valores Programa PIT-W*

La simulación que se realizó mediante el programa PITGRAPH para las condiciones de los pilotes 55 y 63 se presentan en las interfaces gráficas de las figuras 128 y 130 y las gráficas respectivas en las figuras 129 y 131 respectivamente.

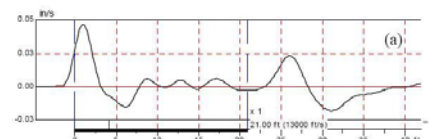
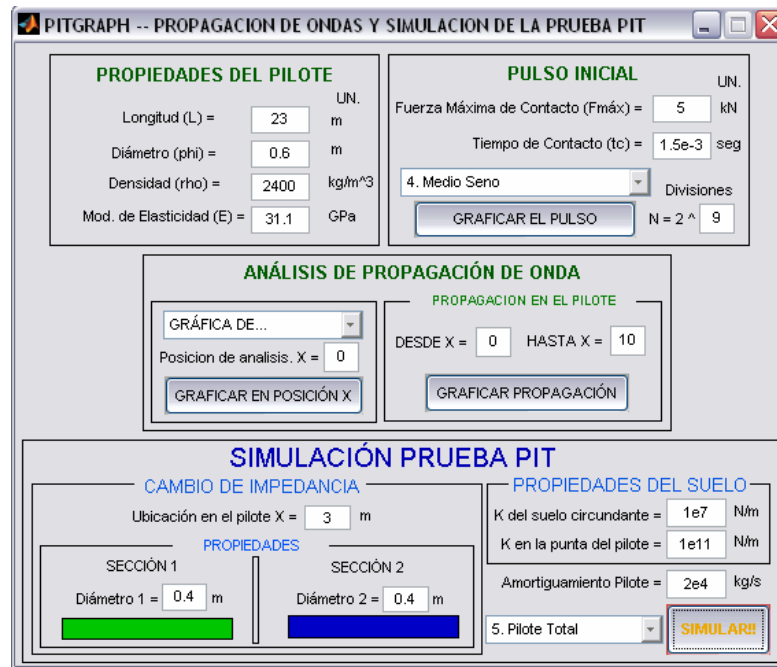


Figura 128 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 55. Carrefour Suba.



**PITGRAPH -- PROPAGACION DE ONDAS Y SIMULACION DE LA PRUEBA PIT**

**PROPIEDADES DEL PILOTE**  
 Longitud (L) = 23 UN. m  
 Diámetro (phi) = 0.6 m  
 Densidad (rho) = 2400 kg/m<sup>3</sup>  
 Mod. de Elasticidad (E) = 31.1 GPa

**PULSO INICIAL**  
 Fuerza Máxima de Contacto (Fmáx) = 5 UN. kN  
 Tiempo de Contacto (tc) = 1.5e-3 seg  
 4. Medio Seno Divisiones  
 N = 2 ^ 9  
 GRAFICAR EL PULSO

**ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE ONDA**  
 GRÁFICA DE...  
 Posición de analisis. X = 0  
 GRAFICAR EN POSICIÓN X  
 PROPAGACION EN EL PILOTE  
 DESDE X = 0 HASTA X = 10  
 GRAFICAR PROPAGACIÓN

**SIMULACIÓN PRUEBA PIT**  
**CAMBIO DE IMPEDANCIA**  
 Ubicación en el pilote X = 3 m  
**PROPIEDADES**  
 SECCIÓN 1 Diámetro 1 = 0.4 m  
 SECCIÓN 2 Diámetro 2 = 0.4 m  
**PROPIEDADES DEL SUELO**  
 K del suelo circundante = 1e7 N/m  
 K en la punta del pilote = 1e11 N/m  
 Amortiguamiento Pilote = 2e4 kg/s  
 5. Pilote Total  
 SIMULAR!

Figura 129 Simulación de la prueba PIT para el pilote 55 mediante el programa PITGRAPH

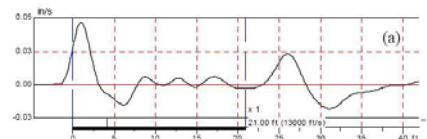
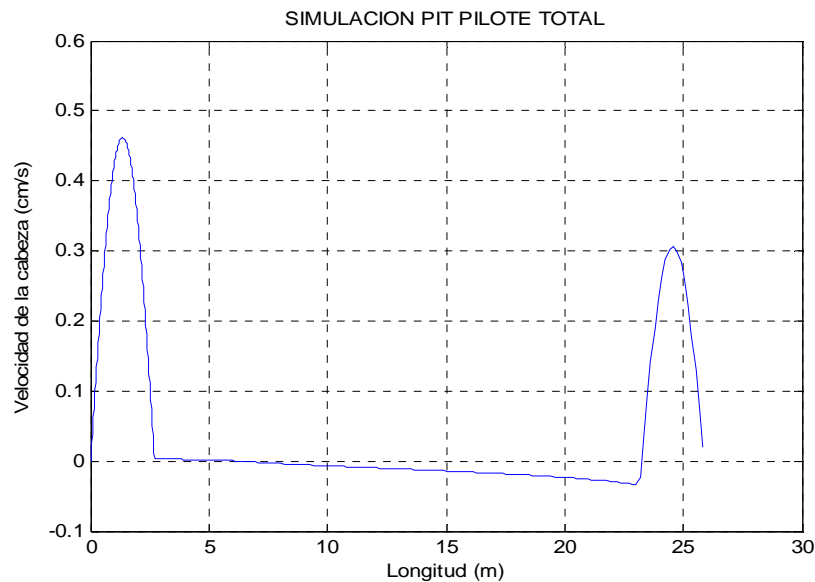
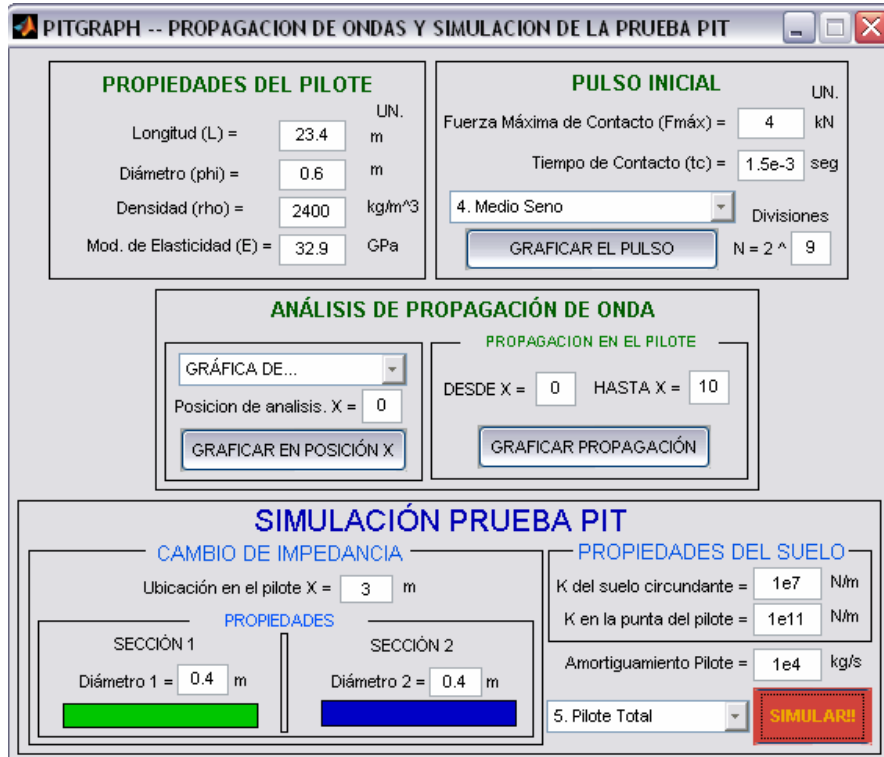


Figura 130 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 63. Carrefour Suba.



**PITGRAPH -- PROPAGACION DE ONDAS Y SIMULACION DE LA PRUEBA PIT**

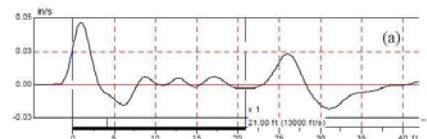
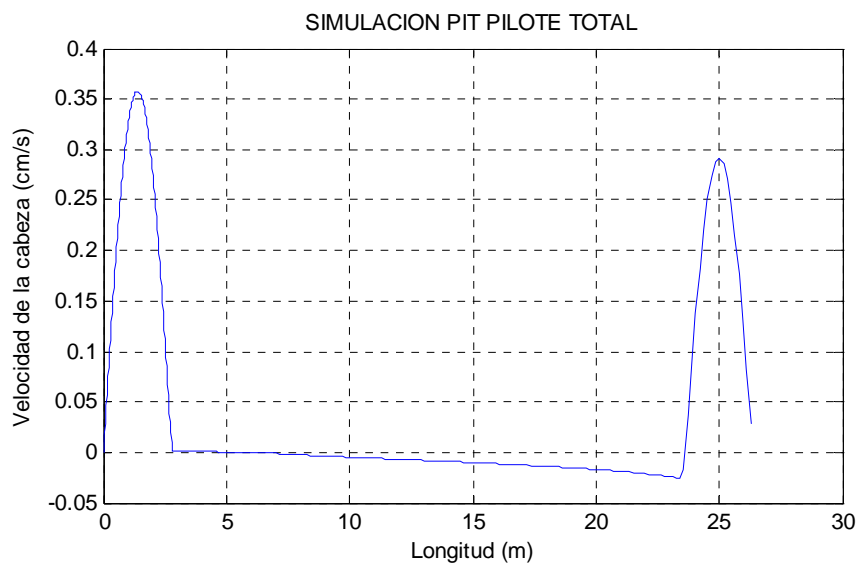
**PROPIEDADES DEL PILOTE**  
 Longitud (L) = 23.4 UN. m  
 Diámetro (phi) = 0.6 m  
 Densidad (rho) = 2400 kg/m<sup>3</sup>  
 Mod. de Elasticidad (E) = 32.9 GPa

**PULSO INICIAL**  
 Fuerza Máxima de Contacto (Fmáx) = 4 UN. kN  
 Tiempo de Contacto (tc) = 1.5e-3 seg  
 4. Medio Seno  
 Divisiones N = 2 ^ 9  
 GRAFICAR EL PULSO

**ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE ONDA**  
 GRÁFICA DE...  
 Posicion de analisis. X = 0  
 GRAFICAR EN POSICIÓN X  
 PROPAGACION EN EL PILOTE  
 DESDE X = 0 HASTA X = 10  
 GRAFICAR PROPAGACIÓN

**SIMULACIÓN PRUEBA PIT**  
**CAMBIO DE IMPEDANCIA**  
 Ubicación en el pilote X = 3 m  
**PROPIEDADES**  
 SECCIÓN 1 Diámetro 1 = 0.4 m  
 SECCIÓN 2 Diámetro 2 = 0.4 m  
**PROPIEDADES DEL SUELO**  
 K del suelo circundante = 1e7 N/m  
 K en la punta del pilote = 1e11 N/m  
 Amortiguamiento Pilote = 1e4 kg/s  
 5. Pilote Total  
**SIMULAR!!**

Figura 131 Simulación de la prueba PIT para el pilote 63 mediante el programa PITGRAPH



Al comparar las señales obtenidas en la prueba y las generadas por la simulación en el programa, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

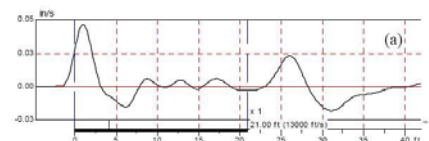
#### PILOTE 55

- La magnitud de la fuerza debida al impacto del matillo en la punta fue de 5kN
- La duración del pulso inicial es de 0.0015 segundos.
- No se presenta ningún defecto a lo largo del fuste del pilote.
- Los efectos debidos a la rigidez del suelo que rodea el fuste del pilote son de mínimo  $1 \times 10^7$  N/m
- El valor mínimo de rigidez del suelo en la punta para la reflexión positiva de la velocidad es de  $1 \times 10^{11}$  N/m.
- El valor calibrado para el amortiguamiento de la señal en el pilote es de aproximadamente  $2 \times 10^4$  kg/s.

#### PILOTE 63

- La magnitud de la fuerza debida al impacto del matillo en la punta fue de 4kN.
- La duración del pulso inicial es de 0.0015 segundos.
- No se presenta ningún defecto a lo largo del fuste del pilote.
- Los efectos debidos a la rigidez del suelo que rodea el fuste del pilote son de mínimo  $3 \times 10^7$  N/m
- El valor mínimo de rigidez del suelo en la punta para la reflexión positiva de la velocidad es de  $1 \times 10^{11}$  N/m.
- El valor calibrado para el amortiguamiento de la señal en el pilote es de aproximadamente  $1 \times 10^4$  kg/s.

**6.5.3 Pilote defectuoso en Puento Batallón Caldas. Obra Transmilenio NQS Sur Tramo1.** En el informe final suministrado se describen los resultados de pruebas PIT realizados a cuatro pilotes para dicha obra. En particular existe un pilote, el número 3, que presenta un defecto por aumento de impedancia.



Para todos los pilotes se tuvo el registro de construcción que se muestra en la siguiente tabla:

**Tabla 16** Registro de construcción de los pilotes analizados. Puente Batallón Caldas

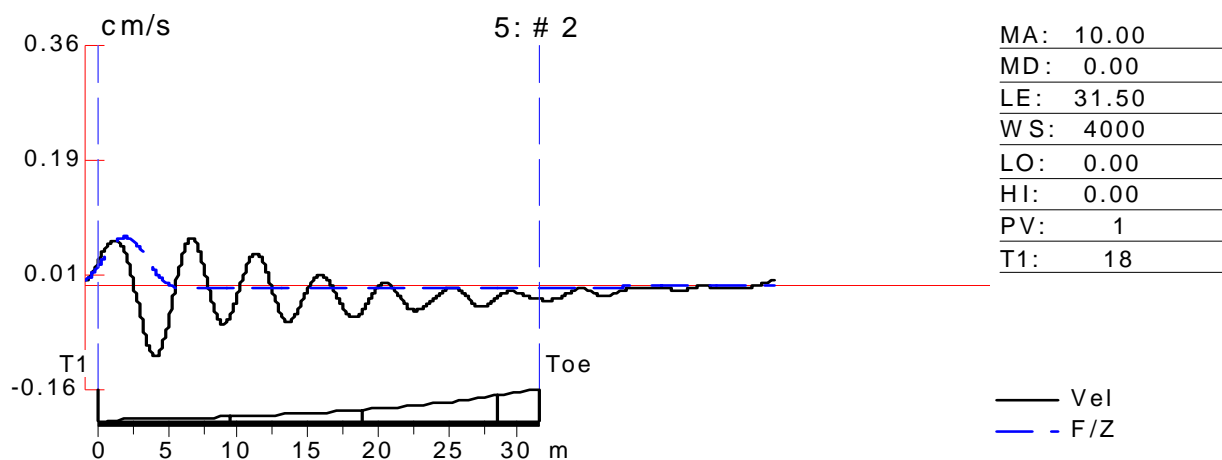
Pilote No	Longitud de ensayo (m)	Volumen teórico (m <sup>3</sup> )	Volumen real (m <sup>3</sup> )
9	32.15	9.47	11.25
8	32.16	9.36	10.5
4	32.02	9.33	10.25
3	31.40	9.47	14.5

*Fuente: Informe Final PIT. Carrefour Suba*

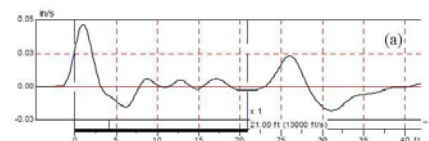
En dicha tabla se observa que el volumen real fue siempre superior al teórico y en particular el pilote 3 presentó un incremento notorio del volumen de concreto vaciado para su construcción indicando posibles defectos. Lo anterior se confirmó con el registro de fundida del pilote en donde se informa que la excavación de 33 m duró abierta toda la noche, con el polímero de contención y que al otro día se había derrumbado parte de la excavación del pilote y por tanto tuvo que ser limpiada.

En cuanto al pilote 3 se pudo identificar un aumento de impedancia a 3.0m de profundidad. El registro PIT de la señal de respuesta luego de realizar la prueba se muestra a continuación.

**Figura 132** Señal PIT para pilote 3. Puente Batallón Caldas



*Fuente: Registro programa PIT-W*



Los valores de los distintos parámetros del pilote 3 se presentan a continuación:

*Tabla 17 Parámetros del pilote 3. Puente Batallón Caldas*

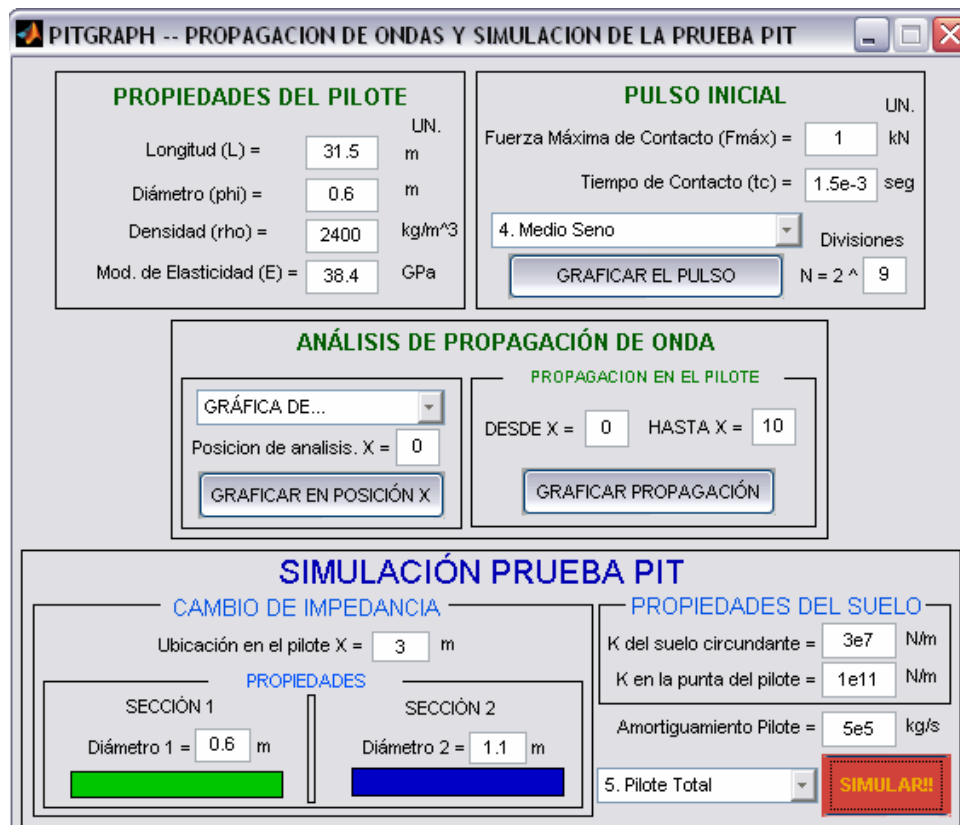
PROPIEDAD	VALOR	UNIDADES
Longitud	31.5	m
Diámetro Nominal	0.6	m
Velocidad de Onda (c)	4000	m/s
Densidad concreto ( $\rho$ )	2400	kg/m <sup>3</sup>
Módulo de Elasticidad (E)	38.4	GPa

*Fuente: Valores Programa PIT-W*

La simulación que se realizó mediante el programa PITGRAPH para las condiciones del pilote 3 se muestran en la interfaz gráfica a continuación:

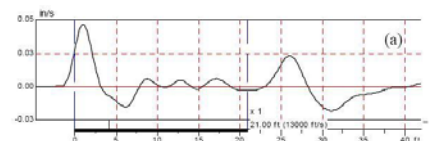
*Figura 133 Parámetros de entrada para la simulación de la prueba PIT del pilote 108.*

*Carrefour Suba.*



The screenshot shows the PITGRAPH software interface with the following sections and parameters:

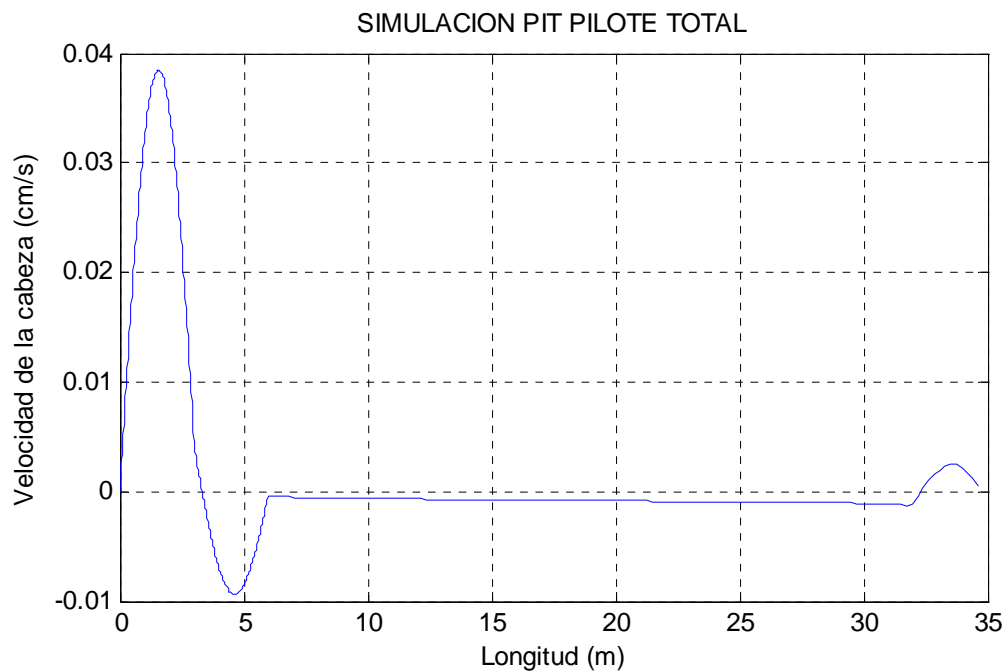
- PROPIEDADES DEL PILOTE:** Longitud (L) = 31.5 m, Diámetro (phi) = 0.6 m, Densidad (rho) = 2400 kg/m<sup>3</sup>, Mod. de Elasticidad (E) = 38.4 GPa.
- PULSO INICIAL:** Fuerza Máxima de Contacto (Fmáx) = 1 kN, Tiempo de Contacto (tc) = 1.5e-3 seg, Pulso: 4. Medio Seno, Divisiones: N = 2 ^ 9.
- ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE ONDA:** GRÁFICA DE... (dropdown), Posicion de analisis. X = 0, GRÁFICA EN POSICIÓN X (button), PROPAGACION EN EL PILOTE: DESDE X = 0 HASTA X = 10, GRÁFICA PROPAGACIÓN (button).
- SIMULACIÓN PRUEBA PIT:**
  - CAMBIO DE IMPEDANCIA:** Ubicación en el pilote X = 3 m.
  - PROPIEDADES:** SECCIÓN 1: Diámetro 1 = 0.6 m; SECCIÓN 2: Diámetro 2 = 1.1 m.
  - PROPIEDADES DEL SUELO:** K del suelo circundante = 3e7 N/m, K en la punta del pilote = 1e11 N/m, Amortiguamiento Pilote = 5e5 kg/s.
  - 5. Pilote Total (dropdown), SIMULAR!! (button).





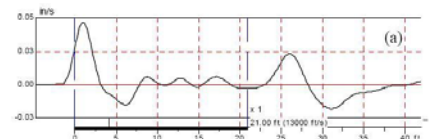
Se calibró el pulso de entrada con una fuerza máxima de contacto de 1.0kN para obtener un valor pico de velocidad de 0.04cm/s e igualmente se calibró el tiempo de contacto a un valor de 0.0015s para obtener una longitud del pulso de entrada de 2.5m. Con éstos parámetros para la generación del pulso inicial e identificando la ubicación del defecto a 3.0m por debajo de la cabeza del pilote, se procedió a calibrar el diámetro del aumento de impedancia para obtener una reflexión con un valor máximo de velocidad 0.01cm/s. La gráfica obtenida para dicha simulación se presenta en la siguiente figura.

*Figura 134 Simulación de la prueba PIT para el pilote 3 mediante el programa PITGRAPH*



Al comparar la señal obtenida en la prueba y la generada por la simulación en el programa, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

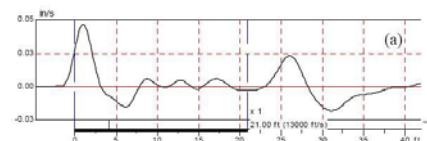
- La magnitud de la fuerza debida al impacto del matillo en la punta fue de 1.0kN.
- La duración del pulso inicial es de 0.0015 segundos.
- El defecto se encuentra ubicado a una profundidad de 3.0m



- El diámetro correspondiente al aumento de impedancia a 3.0m de profundidad es de aproximadamente 1.1m.
- Los efectos debidos a la rigidez del suelo que rodea el fuste del pilote son de mínimo  $3 \times 10^7$  N/m
- El valor mínimo de rigidez del suelo en la punta para la reflexión positiva de la velocidad es de  $1 \times 10^{11}$  N/m.
- El valor calibrado para el amortiguamiento de la señal en el pilote es de aproximadamente  $5 \times 10^5$  kg/s.

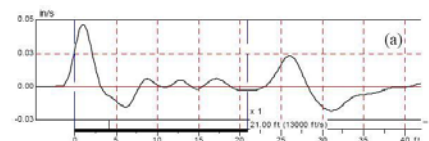
Igualmente se puede observar que mientras la señal real presenta después del registro del defecto una señal armónica causada por el rebote de la onda entre la cabeza y el aumento de diámetro, la gráfica de la simulación tan solo presenta una reflexión para tal defecto.

La presencia de un aumento de diámetro para el pilote 3 explica el por qué presenta un volumen real de vaciado de concreto tan alto respecto al volumen teórico de construcción (expansión del 142%). Dicha situación no representa problemas de tipo estructural para el pilote.

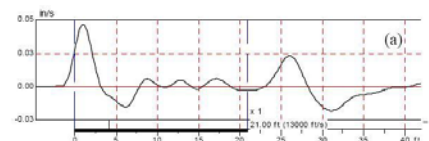


## 7. CONCLUSIONES

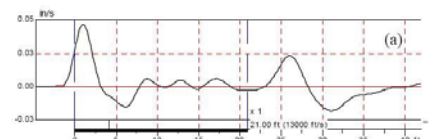
- La prueba de integridad de pilotes (PIT) es una forma de evaluación de la calidad para cimentaciones profundas que por su bajo costo, facilidad y rapidez de ejecución, es usada muy frecuentemente para determinar la integridad estructural de pilotes.
- En muchos países del mundo, especialmente Australia, China, Francia, Alemania, Inglaterra y Estados Unidos, la prueba está debidamente normalizada.
- En la ejecución de la prueba PIT es importante tener en cuenta los efectos del tamaño del martillo que genera el impacto, de acuerdo a la longitud del pilote y la ubicación de los posibles defectos que se vayan registrando. Igualmente es importante ejecutar la prueba con una ubicación del acelerómetro y golpe del martillo a  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{3}{4}$  del diámetro respectivamente, para obtener una señal representativa de la integridad del elemento.
- Dentro del arreglo de la información obtenida, es importante para su análisis utilizar los programas que ofrecen los fabricantes de los equipos y con ello lograr el filtrado y amplificación de la señal para lograr una reflexión en la punta del pilote de similar amplitud que el pulso inicial generado por el impacto del martillo.
- El valor de la velocidad de onda en el concreto oscila alrededor de 4000m/s, pero mediante la prueba debe ser calibrada de acuerdo al registro de reflexión en la punta que se obtenga.
- En la interpretación de resultados de la prueba se debe tener en cuenta que las reflexiones pueden ser causadas por cambios de sección o cambios de calidad en el material. Dichas reflexiones pueden ser positivas para la velocidad en la cabeza del pilote (reducción de impedancia) o negativas (aumento de impedancia).
- Es muy importante llevar a cabo la interpretación de resultados de la prueba con información relativa al subsuelo y registro de construcción de los pilotes, Este registro suministra información de posibles problemas que pueden ayudar a explicar la presencia de defectos detectados por la prueba.



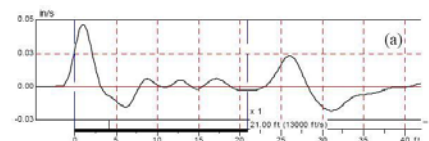
- Para determinar la magnitud de los daños encontrados en el pilote existe el método beta y el método del perfil de impedancia que brindan de manera aproximada información sobre las dimensiones de los defectos.
- A pesar de sus grandes ventajas, se deben considerar algunas limitaciones de la prueba, especialmente por su efectividad para pilotes muy largos y por la ubicación y magnitud de cambios de impedancia que puedan generar nuevas reflexiones y/o restricciones para que la señal viaje hasta la punta.
- El fenómeno de propagación unidimensional de ondas en pilotes se puede adaptar a la prueba PIT al considerar el pilote como un material lineal elástico que obedece las leyes de Hooke y presenta homogeneidad en toda su estructura. Debido a la esbeltez con la que cuentan los pilotes se puede considerar que solamente viajan ondas de compresión a lo largo del mismo.
- En la propagación del pulso a lo largo del pilote se debe tener en cuenta que al encontrar un cambio de impedancia, parte del pulso es reflejado y parte es transmitido dependiendo de las propiedades que presenten las secciones definidas por dicho cambio.
- Dentro de las múltiples posibilidades de solución analítica para la ecuación de propagación unidimensional de onda se escogió la metodología de análisis espectral por simplificar la solución de la ecuación diferencial, por facilitar la incorporación de los efectos de fuerzas retardantes, permitir la conceptualización de la propagación de pulsos de ida y regreso al igual que introducir discontinuidades y cambios de sección para problemas más específicos.
- El análisis espectral aplicado a la solución de la ecuación de onda permite obtener una solución de la ecuación diferencial parcial en términos de la variable de posición para que mediante el uso de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) el pulso inicial pueda ser incorporado a dicha solución. Al ser operado el pulso transformado con la forma espectral de la ecuación de onda se puede aplicar la Transformada Inversa de Fourier (IFFT) y obtener así la solución de la ecuación diferencial parcial en términos de las variables de tiempo y posición. Dicha solución es usada para realizar diferentes tipos de análisis y simulaciones.



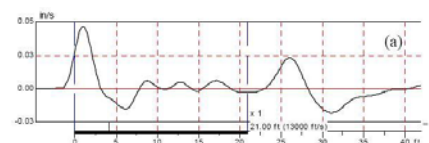
- Para determinar la expresión matemática que describe la historia de fuerza aplicada en la cabeza del pilote por el impacto del martillo, fue usado el pulso tipo “Medio Seno” como la mejor aproximación a los resultados obtenidos en campo para la prueba PIT,
- El lenguaje de programación de MATLAB facilita la solución de problemas complejos al tener ya incorporadas funciones matemáticas como la Transformada Rápida de Fourier (FFT) y su inversa (IFFT). El manejo matricial que éste programa utiliza lo convierte en una herramienta versátil para solucionar problemas de ingeniería y ciencias.
- La interfaz gráfica del programa PITGRAPH permite al usuario solucionar la ecuación de propagación unidimensional de onda aplicada a las condiciones de los pilotes, con las siguientes características:
  1. Generación de diferentes tipos de pulsos (Fuerza Instantánea, Triangular, Rectangular y Medio Seno).
  2. Análisis de la propagación del pulso desde las diferentes propiedades mecánicas dependientes del desplazamiento (velocidad, aceleración, esfuerzo, deformación, fuerza de reacción).
  3. Generación de gráficas de propagación de las diferentes propiedades mecánicas dentro de un rango seleccionado.
  4. Simulación de diferentes opciones para la prueba de integridad de pilotes PIT teniendo en cuenta cambios de impedancia a una profundidad, efectos del suelo y amortiguamiento.
- Al generar los diferentes tipos de pulso, es importante seleccionar un número de divisiones  $N$  tal que permita subdividir el periodo de éste en pequeños incrementos de tiempo y con ello se pueda definir mejor la forma del pulso para su posterior transformación usando la Transformada Rápida de Fourier. El valor mínimo recomendado del exponente es de 9 para un total de divisiones  $N = 512$ .
- Al analizar la propagación de las diferentes propiedades mecánicas a lo largo del pilote se observa como tendencia general la inversión de los valores al llegar a la punta del pilote ( $X=L$ ) y al regresar a la cabeza se observa un retorno a la condición inicial del pulso generado por el impacto del martillo.



- Los valores de rigidez del suelo en la punta muestran valores superiores a los obtenidos alrededor del fuste del pilote, según los resultados de la modelación en elementos finitos del programa PLAXIS. Para dicha modelación se tuvo en cuenta un comportamiento lineal elástico para el suelo y el pilote debido a las mínimas deformaciones que se presentan al realizar la prueba PIT.
- Los valores de rigidez obtenidos mediante las simulaciones de PLAXIS no afectan significativamente la solución que el programa PITGRAPH realiza. A partir de valores por encima de  $1 \times 10^{11} \text{N/m}$  para la rigidez del suelo en la punta y  $1 \times 10^8 \text{N/m}$  para la rigidez del suelo alrededor del fuste del pilote se observan los efectos del suelo en las simulaciones.
- Dentro de la simulación de los posibles casos que el programa PITGRAPH permite se observa que:
  1. La existencia de apoyo en la punta por algún tipo de suelo genera una reflexión positiva de la velocidad para la propagación del pulso y por el contrario su inexistencia genera reflexión negativa de la velocidad.
  2. La magnitud de la reflexión en la punta del pilote depende de la magnitud transmitida después del cambio de impedancia según la teoría de transmisión de ondas.
  3. La presencia de una reducción de impedancia a lo largo del pilote genera una reflexión con velocidad positiva. Su magnitud máxima depende de la magnitud del pulso inicial y del diámetro antes y después de defecto según la teoría de reflexión de ondas.
  4. La presencia de un aumento de impedancia a lo largo del pilote genera una reflexión con velocidad negativa. Su magnitud máxima depende de la magnitud del pulso inicial y del diámetro antes y después de defecto según la teoría de reflexión de ondas.
  5. Los efectos por la presencia de suelo alrededor del fuste del pilote se observan en la señal al incrementar o reducir la velocidad en las zonas donde no se presenta ninguna reflexión.

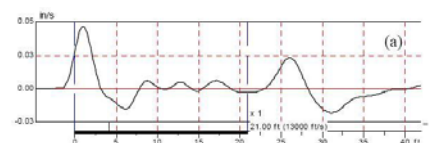


6. El efecto de amortiguamiento de la señal se aprecia con el decrecimiento de las magnitudes de las reflexiones por cambios de impedancia y punta a lo largo del pilote.
- La comparación de la simulación PIT con pruebas reales brinda información valiosa sobre la fuerza máxima de contacto en kN, tiempo de contacto de dicha fuerza, diámetro aproximado del defecto y valoración cuantitativa de los posibles efectos del suelo circundante sobre el pilote.
  - La determinación del diámetro del defecto mediante el programa PITGRAPH arroja resultados similares a los obtenidos por medio del análisis del porcentaje de reducción del área del Método Beta.
  - El programa PITGRAPH desarrollado para MATLAB cuenta con diferentes opciones para analizar la solución de la ecuación de onda en pilotes y la simulación de la prueba PIT para un cambio de impedancia, una sola reflexión y transmisión de onda.
  - La teoría de propagación unidimensional de ondas se puede aplicar a los pilotes usando la solución de la metodología espectral obteniendo resultados cercanos a los reales.



## 8. RECOMENDACIONES

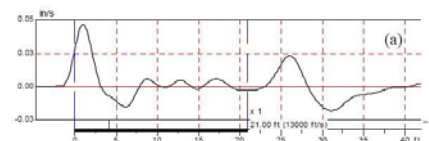
- La teoría de propagación unidimensional de ondas es una buena aproximación y simplificación al fenómeno físico que ocurre internamente en el pilote, más no considera la totalidad del fenómeno que ocurre en tres dimensiones que podría analizarse haciendo un análisis axisimétrico de la propagación.
- Vale la pena investigar más a fondo los efectos de amortiguamiento del material del pilote para su cuantificación y análisis ya que en el presente documento se tuvieron en cuenta por medio de calibraciones con el programa PITGRAPH y no con algún modelo en particular.
- Se puede complementar el programa PITGRAPH con análisis de varias reflexiones y transmisiones de onda al igual que implementar la programación para múltiples cambios de impedancia para su respectiva simulación.



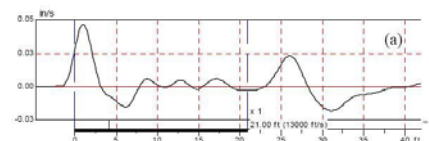


## 9. BIBLIOGRAFÍA

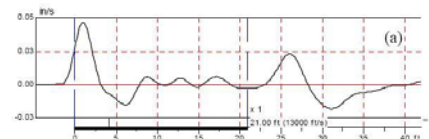
- [1] BEIM. Jorge. Et al. Standardization and Codification of Dynamic Pile Testing. A Worldwide Review. DFI 98 Conference. [en línea] Fecha de visita: 7 de enero de 2005. Disponible en Internet: <<http://web.pile.com/Education/709/default.asp?company=>>>
- [2] CARINO. N.J. The Impact Echo Method: An Overview. Reprinted from the Proceedings of the 2001 Structures Congress & Exposition. May 2001 Washington D.C ASCE 2001. 18p [en línea]. Fecha de visita: 7 de enero de 2005. Disponible en Internet: <<http://fire.nist.gov/bfrlpubs/build01/PDF/b01005.pdf>>
- [3] CHAPRA. Steven C. Métodos Numéricos para Ingenieros. Méjico: McGraw Hill. 2003. Pag 852
- [4] CHERNAUSKAS. Les & Paikowsky Samuel. Deep Foundations Integrity Testing: Thecniques & Case Histories. En; Civil Engineering Practice. Construction Considerations 1999.
- [5] CHOW. Y.K. Low Strain Integrity Testing of Piles: Three-Dimensional Effects. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. ASCE Vol. 129, No.11 November 2003.
- [6] DOYLE. James F. Wave Propagation in Structures. New York: Editorial Springer-Verlag. 1989 Pags 1-87
- [7] DAS. Braja M. Solutions of Partial Differential Equations. TAB Professional and Reference Books. 1986. Pags 210-230
- [8] DUFFY. Dean G. Solutions of Partial Differential Equations. TAB Professional and Reference Books. 1986. Pags 210-230



- [9] FERNÁNDEZ. Carlos. Los ensayos de integridad estructural de pilotes. Situación actual en España y perspectivas. Barcelona. [en línea] 2000. Fecha de visita: 7 de enero de 2005. Disponible en Internet: <<http://www.fernandeztadeo.com/2.htm>>
- [10] FINNO. Richard J. Non-Destructive Evaluation of a Deep Foundation Test Section at the Northwestern University National Geotechnical Experimentation Site June 1997. Northwestern University. [en línea] 1997. Fecha de visita: 7 de enero de 2005. Disponible en Internet: <<http://www.iti.northwestern.edu/publications/finno/archive/dft.html>>
- [11] HUSSEIN. Mohamad H. A Brief History of the Application of Stress-Wave Theory to Piles. ASCE license copyright [en línea] 2004. Fecha de visita: Febrero 17 de 2005. Disponible en Internet: <<http://www.ascelibrary.org>>
- [12] KOSHYAKOV. N.S. Differential Equations of Mathematical Physics. Amsterdam: North Holland Publishing Company. 1964. Pags 42-69 y 117-146
- [13] LIKINS. G. et al. Alternate Verification Methods for Augercast Piles. [en línea] 2002. Fecha de visita: Febrero 17 de 2005. Disponible en Internet: <[http://www.pile.com/Education/774-AlterVerifyMethods/orlando2002-alternate\\_verification\\_methods.pdf](http://www.pile.com/Education/774-AlterVerifyMethods/orlando2002-alternate_verification_methods.pdf)>
- [14] LIKINS. G. Recent Advances and proper use of PDI low strain pile integrity testing. En: Application of Stress-Wave Theory to Piles. Niyama & Beim. 2000 Balkema, Rotterdam.
- [15] LIKINS. G. & Piscsalko. Detection and prevention of anomalies for augercast piling. En: Application of Stress-Wave Theory to Piles. Niyama & Beim. 2000 Balkema, Rotterdam.
- [16] MATH WORKS Inc. MATLAB Creating Graphical User Interfaces. [en línea] 2005. Fecha de visita: Mayo 03 de 2005. Disponible en Internet: <<http://www.mathworks.com>>



- [17] MASSOUDI. Nasser. Non-destructive testing of piles using the low strain integrity method. En: Fifth International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering. New York 2004.
- [18] MIDDENDORP. P. Thirty Years of Experience with The Wave Equation Solution Based on the Method of Characteristics. En: Seventh International Conference on the Application of Stress Wave Theory to Piles. Kuala Lumpur, Malaysia. 2004.
- [19] MORGANO. C. Michael. Determining Embedment Depths of Deep Foundations Using Non-Destructive Methods. En: Fifth International Conference on the application of stress-wave theory to piles. Townsend & Hussein. 1996 Orlando, Florida.
- [20] PAZ. Mario. Dinámica Estructural. Barcelona: Editorial Reverté. 1991. Pags 104-127.
- [21] PDI. Pile Dynamics Inc. Interpretation of Low Strain Results from a Pile Integrity Tester (P.I.T). [en línea] 2003. Fecha de visita: Febrero 17 de 2005. Disponible en Internet: <<http://web.pile.com/download/docs/PIT%20Interpret.rtf>>
- [22] PÉREZ. Cesar. MatLab y sus aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería. Pearson Educación S.A. Madrid. 2002
- [23] RAUSCHE. F. Pile Integrity testing and analysis. En: Application of Stress-Wave Theory to Piles. F.B.J Barends. 1992 Balkema, Rotterdam. [en línea] 2000. Fecha de visita: 7 de enero de 2005. Disponible en Internet: <<http://www.pile.com/Education/4thStresswave/PileIntegrityTestingAndAnalysis.pdf>>
- [24] RAUSCHE. F. Determination of Pile Damage by Top Measurements. En: Behavior of Deep Foundations ASTM, STP 670, Raymond Lundgren. ASTM 1979
- [25] SETO. W.W. Schaum's Outline of Theory and problems of mechanical vibrations. San José State College. 1964. Pag 128-136, 185-195

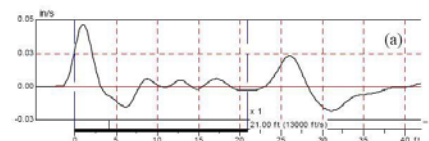


[26] VERRUIJT A. Soil Dynamics. Delft University of Technology. [en línea] 2005. Fecha de visita: Febrero 17 de 2005. Disponible en Internet:  
< <http://www.vulcanhammer.net/download/SoilDynamics.pdf> >. Pag 56-85

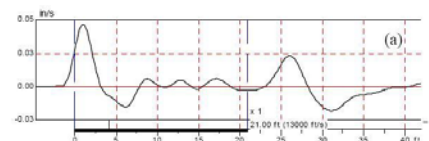
[27] WARRINGTON. D.C. Closed for solution of the wave equation for piles. University of Tennessee at Chattanooga. [en línea] 1999. Fecha de visita: Febrero 15 de 2005. Disponible en Internet: < <http://www.vulcanhammer.net/wave/isa.php> >

[28] WARRINGTON. D.C. Application of the Closed form solution for the damped wave equation to piles. University of Tennessee at Chattanooga. [en línea] 1997. Fecha de visita: Febrero 15 de 2005. Disponible en Internet:  
< <http://www.vulcanhammer.net/download/applications.pdf> >

[29] WEINBERGER. H.F. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Barcelona: Editorial Reverté, 1977. Pags 1-50



# *ANEXO 1 - Código Fuente de la función PITGRAPH.m*



```

function varargout = PITGRAPH(varargin)
% PITGRAPH Application M-file for PITGRAPH.fig
% FIG = PITGRAPH launch PITGRAPH GUI.
% PITGRAPH('callback_name', ...) invoke the named callback.

% Last Modified by GUIDE v2.0 30-May-2005 13:43:12

if nargin == 0 % LAUNCH GUI

    fig = openfig(mfilename,'reuse');

    % Use system color scheme for figure:
    set(fig,'Color',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));

    % Generate a structure of handles to pass to callbacks, and store it.
    handles = guihandles(fig);
    guidata(fig, handles);

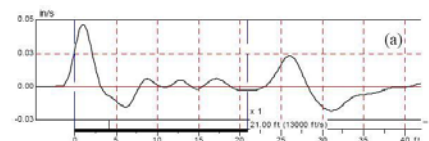
    if nargout > 0
        varargout{1} = fig;
    end

elseif ischar(varargin{1}) % INVOKE NAMED SUBFUNCTION OR CALLBACK

    try
        [varargout{1:nargout}] = feval(varargin{:}); % FEVAL switchyard
    catch
        disp(lasterr);
    end

end

% | ABOUT CALLBACKS:
% | GUIDE automatically appends subfunction prototypes to this file, and
% | sets objects' callback properties to call them through the FEVAL
% | switchyard above. This comment describes that mechanism.
% |
% | Each callback subfunction declaration has the following form:
% | <SUBFUNCTION_NAME>(H, EVENTDATA, HANDLES, VARARGIN)
% |
% | The subfunction name is composed using the object's Tag and the
% | callback type separated by '_', e.g. 'slider2_Callback',
% | 'figure1_CloseRequestFcn', 'axis1_ButtondownFcn'.
% |
% | H is the callback object's handle (obtained using GCBO).
% |
% | EVENTDATA is empty, but reserved for future use.
% |
% | HANDLES is a structure containing handles of components in GUI using
% | tags as fieldnames, e.g. handles.figure1, handles.slider2. This
% | structure is created at GUI startup using GUIHANDLES and stored in
% | the figure's application data using GUIDATA. A copy of the structure
% | is passed to each callback. You can store additional information in
% | this structure at GUI startup, and you can change the structure
% | during callbacks. Call guidata(h, handles) after changing your
% | copy to replace the stored original so that subsequent callbacks see
% | the updates. Type "help guihandles" and "help guidata" for more
  
```



```

% | information.
% |
% | VARARGIN contains any extra arguments you have passed to the
% | callback. Specify the extra arguments by editing the callback
% | property in the inspector. By default, GUIDE sets the property to:
% | <MFILENAME>(<SUBFUNCTION_NAME>', gcbo, [], guidata(gcbo))
% | Add any extra arguments after the last argument, before the final
% | closing parenthesis.

% -----
function varargout = L_edit1_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.L_edit1.

% -----
function varargout = phi_edit2_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.phi_edit2.

% -----
function varargout = rho_edit3_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.rho_edit3.

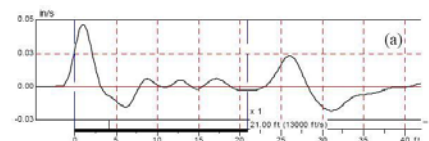
% -----
function varargout = E_edit4_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.E_edit4.

% -----
function varargout = fmax_edit5_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.fmax_edit5.

% -----
function varargout = tc_edit6_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.tc_edit6.

% -----
function varargout = tpulso_popupmenu1_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.tpulso_popupmenu1.

% -----
function varargout = gpulso_togglebutton1_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.gpulso_togglebutton1.
%-----OBTENCION DE LOS PARAMETROS DE ENTRADA-----
L=str2double(get(handles.L_edit1,'String'));
if isnan(L)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Longuitud')
end
phi=str2double(get(handles.phi_edit2,'String'));
if isnan(phi)
    errordlg('Entre un valor numerico para el Diametro')
end
rho=str2double(get(handles.rho_edit3,'String'));
if isnan(rho)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Densidad')
end
E=str2double(get(handles.E_edit4,'String'))*1e9;
if isnan(E)
    errordlg('Entre un valor numerico el Mod. de Elasticidad')
  
```

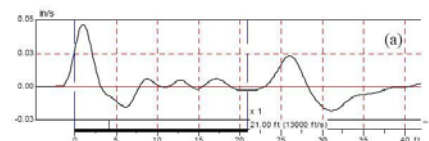


```

end
fmax=str2double(get(handles.fmax_edit5,'String'))*1e3;
if isnan(fmax)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Fuerza de contacto')
end
tc=str2double(get(handles.tc_edit6,'String'));
if isnan(tc)
    errordlg('Entre un valor numerico para el Tiempo de contacto')
end
exponente=str2double(get(handles.N_edit18,'String'));
if isnan(exponente)
    errordlg('Entre un valor numerico del exponente para las divisiones del pulso inicial')
end
%Cálculo velocidad de onda en el concreto
c=sqrt(E/rho);
%Cálculo tiempo de llegada de la onda a la punta
tpunta=L/c;

%-----SELECCION DEL TIPO DE PULSO A ANALIZAR-----
val=get(handles.tpulso_popupmenu1,'Value');
switch val
case 1
    errordlg('Seleccione un TIPO DE PULSO a generar')
case 2 %Pulso Tipo Fuerza Instantanea
    %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
    N=2^exponente;
    %Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
    T=2*tpunta;
    %Incremento de tiempo
    dT=T/N;
    %Vector de tiempo para fuerza de contacto
    vtiempo=[0:dT:tc];
    ntiempo=size(vtiempo,1);
    %Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
    fuerza=zeros(ntiempo,1);
    fuerza(round(ntiempo/2),1)=fmax;
    %Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
    ndata=size(fuerza,1);
    %Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
    for j=1:ndata,
        f(j,1)=fuerza(j,1);
    end
    for j=ndata+1:N,
        f(j,1)=0;
    end
    ndata=size(f,1)
    it=[0:dT:dT*(ndata-1)];
    plot(it,f(1:ndata)/1000)
    grid on
    title('PULSO TIPO FUERZA INSTANTANEA')
    xlabel('Tiempo (s)')
    ylabel('Fuerza (kN)')

case 3 %Pulso Tipo Triangular
    %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
    N=2^exponente;
    %Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
    T=2*tpunta;
  
```



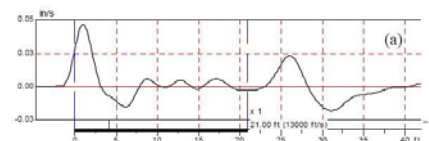


```

%Incremento de tiempo
dT=T/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo=[0:dT:tc]';
ntiempo=size(vtiempo,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
for j=1:round(ntiempo/2),
    fuerza(j,1)=fmax/(tc/2)*(j-1)*dT;
end
for j=round(ntiempo/2)+1:ntiempo,
    fuerza(j,1)=-fmax/(tc/2)*(j-1)*dT+2*fmax;
end
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata=size(fuerza,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata,
    f(j,1)=fuerza(j,1);
end
for j=ndata+1:N,
    f(j,1)=0;
end
ndata=size(f,1);
it=[0:dT:dT*(ndata-1)]';
plot(it,f(1:ndata)/1000)
grid on
title('PULSO TIPO FUERZA TRIANGULAR')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Fuerza (kN)')
  
```

```

case 4 %Pulso Tipo Rectangular
%Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
N=2^exponente;
%Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
T=2*tpunta;
%Incremento de tiempo
dT=T/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo=[0:dT:tc]';
ntiempo=size(vtiempo,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
for j=1:ntiempo,
    fuerza(j,1)=fmax;
end
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata=size(fuerza,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata,
    f(j,1)=fuerza(j,1);
end
for j=ndata+1:N,
    f(j,1)=0;
end
ndata=size(f,1);
it=[0:dT:dT*(ndata-1)]';
plot(it,f(1:ndata)/1000)
grid on
title('PULSO TIPO RECTANGULAR')
xlabel('Tiempo (s)')
  
```



```

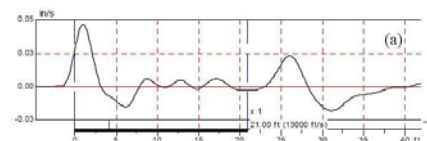
ylabel('Fuerza (kN)')

case 5 %Pulso Tipo Medio Seno
%Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
N=2^exponente;
%Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
T=2*tpunta;
%Incremento de tiempo
dT=T/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo=[0:dT:tc]';
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
fuerza=fmax*sin(pi*vtiempo/tc);
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata=size(fuerza,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata,
    f(j,1)=fuerza(j,1);
end
for j=ndata+1:N,
    f(j,1)=0;
end
ndata=size(f,1);
it=[0:dT:dT*(ndata-1)]';
plot(it,f(1:ndata)/1000)
grid on
title('PULSO TIPO MEDIO SENO')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Fuerza (kN)')
end
guidata(handles.tpulso_popupmenu1,handles)

% -----
function varargout = tgraficapopupmenu2_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.tgraficapopupmenu2.

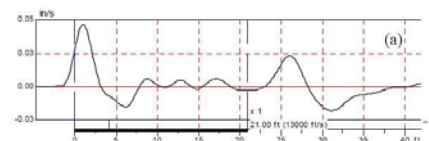
% -----
function varargout = gX_togglebutton2_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.gX_togglebutton2.

%-----OBTENCION DE LOS PARAMETROS DE ENTRADA-----
L=str2double(get(handles.L_edit1,'String'));
if isnan(L)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Longitud')
end
phi=str2double(get(handles.phi_edit2,'String'));
if isnan(phi)
    errordlg('Entre un valor numerico para el Diametro')
end
rho=str2double(get(handles.rho_edit3,'String'));
if isnan(rho)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Densidad')
end
E=str2double(get(handles.E_edit4,'String'))*1e9;
if isnan(E)
    errordlg('Entre un valor numerico el Mod. de Elasticidad')
end
end
  
```



```

fmax=str2double(get(handles.fmax_edit5,'String'))*1e3;
if isnan(fmax)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Fuerza de contacto')
end
tc=str2double(get(handles.tc_edit6,'String'));
if isnan(tc)
    errordlg('Entre un valor numerico para el Tiempo de contacto')
end
exponente=str2double(get(handles.N_edit18,'String'));
if isnan(exponente)
    errordlg('Entre un valor numerico del exponente para las divisiones del pulso inicial')
end
%Cálculo velocidad de onda en el concreto
c=sqrt(E/rho);
%Cálculo tiempo de llegada de la onda a la punta
tpunta=L/c;
%Calculo del area del pilote
A=pi/4*phi^2;
%-----SELECCION DEL TIPO DE PULSO A ANALIZAR-----
val=get(handles.tpulso_popupmenu1,'Value');
switch val
case 1
    errordlg('Seleccione un TIPO DE PULSO a generar')
case 2 %Pulso Tipo Fuerza Instantanea
    %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
    N=2^exponente;
    %Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
    T=2*tpunta;
    %Incremento de tiempo
    dT=T/N;
    %Vector de tiempo para fuerza de contacto
    vtiempo=[0:dT:tc]';
    ntiempo=size(vtiempo,1);
    %Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
    fuerza=zeros(ntiempo,1);
    fuerza(round(ntiempo/2),1)=fmax;
    %Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
    ndata=size(fuerza,1);
    %Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
    for j=1:ndata,
        f(j,1)=fuerza(j,1);
    end
    for j=ndata+1:N,
        f(j,1)=0;
    end
    ndata=size(f,1)
case 3 %Pulso Tipo Triangular
    %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
    N=2^exponente;
    %Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
    T=2*tpunta;
    %Incremento de tiempo
    dT=T/N;
    %Vector de tiempo para fuerza de contacto
    vtiempo=[0:dT:tc]';
    ntiempo=size(vtiempo,1);
    %Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
  
```



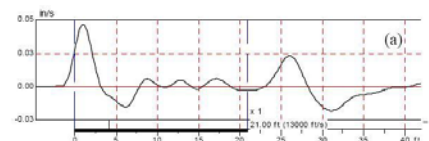
```

for j=1:round(ntiempo/2),
    fuerza(j,1)=fmax/(tc/2)*(j-1)*dT;
end
for j=round(ntiempo/2):ntiempo,
    fuerza(j,1)=-fmax/(tc/2)*(j-1)*dT+2*fmax;
end
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata=size(fuerza,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata,
    f(j,1)=fuerza(j,1);
end
for j=ndata+1:N,
    f(j,1)=0;
end
ndata=size(f,1)

case 4 %Pulso Tipo Rectangular
%Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
N=2^exponente;
%Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
T=2*tpunta;
%Incremento de tiempo
dT=T/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo=[0:dT:tc]';
ntiempo=size(vtiempo,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
fuerza=zeros(ntiempo,1);
for j=2:ntiempo,
    fuerza(j,1)=fmax;
end
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata=size(fuerza,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata,
    f(j,1)=fuerza(j,1);
end
for j=ndata+1:N,
    f(j,1)=0;
end
ndata=size(f,1);

case 5 %Pulso Tipo Medio Seno
%Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
N=2^exponente;
%Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
T=2*tpunta;
%Incremento de tiempo
dT=T/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo=[0:dT:tc]';
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
fuerza=fmax*sin(pi*vtiempo/tc);
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata=size(fuerza,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata,

```



```

    f(j,1)=fuerza(j,1);
  end
  for j=ndata+1:N,
    f(j,1)=0;
  end
  ndata=size(f,1);

end
guidata(handles.tpulso_popupmenu1,handles)
%-----
%-----PROCESO
%-----
%Transformada Rápida de fourier (FFT) para vector f
ft=fft(f);
%Vector de frecuencias fn hasta fNyquist
f=(1:N/2+1)/T;
f=f';
%Vector de Relación espectral kn
wn=2*pi*f;
kn=sqrt(rho/E)*wn;
x=str2double(get(handles.Xi_edit7,'String'));
if isnan(x)
  errordlg('Entre un valor numerico para posicion X')
end
dim=size(kn,1);
%Ciclo para operar función de transferencia G(x,w)y f-----
for j=1:dim,
  G(j,1)=(-1/(E*A*i*kn(j,1))*exp((i*kn(j,1)*x)));
  usombbrero(j,1)=ft(j,1)*G(j,1);
end

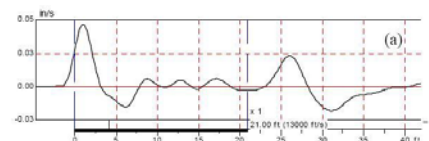
%-----
%-----GRAFICAS DE ANÁLISIS
%-----
%Vector del tiempo para las distintas gráficas
it=[0:2*dT:2*dT*(dim-1)];

%-----SELECCION DEL TIPO DE GRAFICA -----
val=get(handles.tgraficapopupmenu2,'Value');
switch val
case 1
  errordlg('Seleccione una GRAFICA DE... a analizar')
case 2 %-----Gráfica de desplazamiento u(x,t)-----

  %Vector de desplazamiento u(x,t) al operar la transformada inversa
  u=ifft(usombbrero);
  u=real(u);
  %-----Corrección vector u iniciando en 0
  uinicial=u(1,1);
  for j=1:dim,
    u(j,1)=u(j,1)-uinicial;
  end
  plot(it,u(1:dim))
  title('PROPAGACION ONDA EN POSICION X')
  xlabel('Tiempo (s)')
  ylabel('Desplazamiento (m)')

case 3 %-----Gráfica de velocidad v(x,t)-----

```



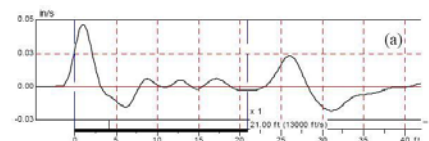
```

%-----Ciclo para calcular velocidad espectral
for j=1:dim,
    upunto(j,1)=usombbrero(j,1)*i*wn(j,1);
end
%Vector de velocidad v(x,t)al operar la transformada inversa
vel=ifft(upunto);
vel=real(vel);
%-----Corrección vector vel iniciando en 0
velinicial=vel(1,1);
for j=1:dim,
    vel(j,1)=vel(j,1)-velinicial;
end
plot(it,vel(1:dim))
title('PROPAGACION ONDA EN POSICION X')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Velocidad (m/s)')

case 4 %-----Gráfica de aceleracion a(x,t)-----
%-----Ciclo para calcular aceleracion espectral
for j=1:dim,
    udospuntos(j,1)=usombbrero(j,1)*i^2*wn(j,1)^2;
end
%Vector de aceleracion a(x,t)al operar la transformada inversa
accel=ifft(udospuntos);
accel=real(accel);
plot(it,accel(1:dim)/9.81)
title('PROPAGACION ONDA EN POSICION X')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Aceleracion (G)')

case 5 %-----Gráfica de esfuerzos sigma(x,t)-----
%-----Ciclo para calcular esfuerzo espectral
for j=1:dim,
    stress(j,1)=-i*kn(j,1)*E*usombbrero(j,1);
end
%Vector de esfuerzos sigma(x,t)al operar la transformada inversa
esfuerzos=ifft(stress);
esfuerzos=real(esfuerzos);
%-----Corrección vector esfuerzos iniciando en 0
esfuerzosinicial=esfuerzos(1,1);
for j=1:dim,
    esfuerzos(j,1)=esfuerzos(j,1)-esfuerzosinicial;
end
plot(it,esfuerzos(1:dim)/1000)
title('PROPAGACION ONDA EN POSICION X')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Esfuerzos (kPa)')

case 6
%-----Ciclo para calcular deformacion espectral
for j=1:dim,
    strain(j,1)=-i*kn(j,1)*usombbrero(j,1);
end
%Vector de deformación e(x,t)al operar la transformada inversa
deformacion=ifft(strain);
deformacion=real(deformacion);
%-----Corrección vector deformacion iniciando en 0
deformacioninicial=deformacion(1,1);
  
```



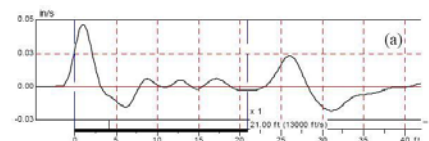
```

for j=1:dim,
    deformacion(j,1)=deformacion(j,1)*100-deformacioninicial*100;
end
plot(it,deformacion(1:dim))
title('PROPAGACION ONDA EN POSICION X')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Deformación (%)')

case 7
%-----Ciclo para calcular fuerza espectral
for j=1:dim,
    force(j,1)=-i*kn(j,1)*E*A*usombbrero(j,1);
end
%Vector de fuerzas F(x,t)al operar la transformada inversa
fuerza=ifft(force);
fuerza=real(fuerza);
%-----Corrección vector esfuerzos iniciando en 0
fuerzainicial=fuerza(1,1);
for j=1:dim,
    fuerza(j,1)=fuerza(j,1)-fuerzainicial;
end
plot(it,fuerza(1:dim)/1000)
title('PROPAGACION ONDA EN POSICION X')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Fuerza (kN)')

case 8
%-----Ciclo para calcular propiedades mecanicas espectralmente
for j=1:dim,
    strain(j,1)=-i*kn(j,1)*usombbrero(j,1);
    stress(j,1)=-i*kn(j,1)*E*usombbrero(j,1);
    force(j,1)=-i*kn(j,1)*E*A*usombbrero(j,1);
    upunto(j,1)=usombbrero(j,1)*i*wn(j,1);
    udospuntos(j,1)=usombbrero(j,1)*i^2*wn(j,1)^2;
end
%Vector de desplazamiento u(x,t) al operar la transformada inversa
u=ifft(usombbrero);
u=real(u);
%-----Corrección vector u iniciando en 0
uinicial=u(1,1);
for j=1:dim,
    u(j,1)=u(j,1)-uinicial;
end
subplot(6,1,1)
plot(it,u(1:dim))
title('PROPAGACION ONDA EN POSICION X')
ylabel('Desplazamiento (m)')

%Vector de velocidad v(x,t)al operar la transformada inversa
vel=ifft(upunto);
vel=real(vel);
%-----Corrección vector vel iniciando en 0
velinicial=vel(1,1);
for j=1:dim,
    vel(j,1)=vel(j,1)-velinicial;
end
subplot(6,1,2)
plot(it,vel(1:dim))
  
```



```

ylabel('Velocidad (m/s)')

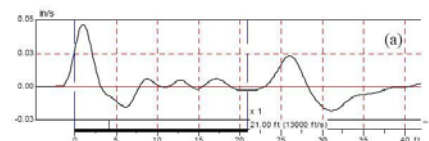
%Vector de aceleracion a(x,t)al operar la transformada inversa
accel=ifft(udospuntos);
accel=real(accel);
%-----Corrección vector aceleracion iniciando en 0
accelinicial=accel(1,1);
for j=1:dim,
    accel(j,1)=accel(j,1)/9.81-accelinicial/9.81;
end
subplot(6,1,3)
plot(it,accel(1:dim))
ylabel('Aceleracion (G)')

%Vector de esfuerzos sigma(x,t)al operar la transformada inversa
esfuerzos=ifft(stress);
esfuerzos=real(esfuerzos);
%-----Corrección vector esfuerzos iniciando en 0
esfuerzosinicial=esfuerzos(1,1);
for j=1:dim,
    esfuerzos(j,1)=esfuerzos(j,1)-esfuerzosinicial;
end
subplot(6,1,4)
plot(it,esfuerzos(1:dim)/1000)
ylabel('Esfuerzos (kPa)')

%Vector de deformación e(x,t)al operar la transformada inversa
deformacion=ifft(strain);
deformacion=real(deformacion);
%-----Corrección vector deformacion iniciando en 0
deformacioninicial=deformacion(1,1);
for j=1:dim,
    deformacion(j,1)=deformacion(j,1)*100-deformacioninicial*100;
end
subplot(6,1,5)
plot(it,deformacion(1:dim))
ylabel('Deformación (%)')

%Vector de fuerzas F(x,t)al operar la transformada inversa
fuerza=ifft(force);
fuerza=real(fuerza);
%-----Corrección vector esfuerzos iniciando en 0
fuerzainicial=fuerza(1,1);
for j=1:dim,
    fuerza(j,1)=fuerza(j,1)-fuerzainicial;
end
subplot(6,1,6)
plot(it,fuerza(1:dim)/1000)
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Fuerza (kN)')
end
guidata(handles.tgrafica_popupmenu2,handles)

% -----
function varargout = Xi_edit7_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.Xi_edit7.
  
```





```

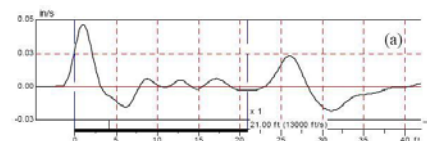
% -----
function varargout = X0_edit8_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.X0_edit8.

% -----
function varargout = Xf_edit9_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.Xf_edit9.

% -----
function varargout = gpropagacion_togglebutton3_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.gpropagacion_togglebutton3.

%-----OBTENCION DE LOS PARAMETROS DE ENTRADA-----
L=str2double(get(handles.L_edit1,'String'));
if isnan(L)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Longitud')
end
phi=str2double(get(handles.phi_edit2,'String'));
if isnan(phi)
    errordlg('Entre un valor numerico para el Diametro')
end
rho=str2double(get(handles.rho_edit3,'String'));
if isnan(rho)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Densidad')
end
E=str2double(get(handles.E_edit4,'String'))*1e9;
if isnan(E)
    errordlg('Entre un valor numerico el Mod. de Elasticidad')
end
fmax=str2double(get(handles.fmax_edit5,'String'))*1e3;
if isnan(fmax)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Fuerza de contacto')
end
tc=str2double(get(handles.tc_edit6,'String'));
if isnan(tc)
    errordlg('Entre un valor numerico para el Tiempo de contacto')
end
exponente=str2double(get(handles.N_edit18,'String'));
if isnan(exponente)
    errordlg('Entre un valor numerico del exponente para las divisiones del pulso inicial')
end
%Cálculo velocidad de onda en el concreto
c=sqrt(E/rho);
%Cálculo tiempo de llegada de la onda a la punta
tpunta=L/c;
%Calculo del area del pilote
A=pi/4*phi^2;

%-----SELECCION DEL TIPO DE PULSO A ANALIZAR-----
val=get(handles.tpulso_popupmenu1,'Value');
switch val
case 1
    errordlg('Seleccione un TIPO DE PULSO a generar')
case 2 %Pulso Tipo Fuerza Instantanea
    %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
    N=2^exponente;
    %Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
    T=2*tpunta;
  
```

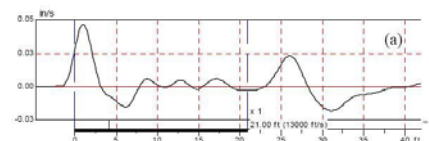


```

%Incremento de tiempo
dT=T/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo=[0:dT:tc]';
ntiempo=size(vtiempo,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
fuerza=zeros(ntiempo,1);
fuerza(round(ntiempo/2),1)=fmax;
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata=size(fuerza,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata,
    f(j,1)=fuerza(j,1);
end
for j=ndata+1:N,
    f(j,1)=0;
end
ndata=size(f,1)

case 3 %Pulso Tipo Triangular
%Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
N=2^exponente;
%Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
T=2*tpunta;
%Incremento de tiempo
dT=T/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo=[0:dT:tc]';
ntiempo=size(vtiempo,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
for j=1:round(ntiempo/2),
    fuerza(j,1)=fmax/(tc/2)*(j-1)*dT;
end
for j=round(ntiempo/2):ntiempo,
    fuerza(j,1)=-fmax/(tc/2)*(j-1)*dT+2*fmax;
end
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata=size(fuerza,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata,
    f(j,1)=fuerza(j,1);
end
for j=ndata+1:N,
    f(j,1)=0;
end
ndata=size(f,1)

case 4 %Pulso Tipo Rectangular
%Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
N=2^exponente;
%Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
T=2*tpunta;
%Incremento de tiempo
dT=T/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo=[0:dT:tc]';
ntiempo=size(vtiempo,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
  
```

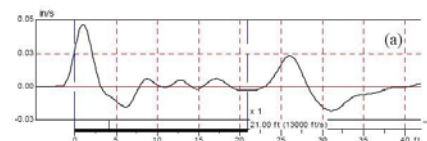


```

fuerza=zeros(ntiempo,1);
for j=2:ntiempo,
    fuerza(j,1)=fmax;
end
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata=size(fuerza,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata,
    f(j,1)=fuerza(j,1);
end
for j=ndata+1:N,
    f(j,1)=0;
end
ndata=size(f,1);

case 5 %Pulso Tipo Medio Seno
    %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
    N=2^exponente;
    %Periodo T de la senal hasta 2*tpunta
    T=2*tpunta;
    %Incremento de tiempo
    dT=T/N;
    %Vector de tiempo para fuerza de contacto
    vtiempo=[0:dT:tc]';
    %Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
    fuerza=fmax*sin(pi*vtiempo/tc);
    %Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
    ndata=size(fuerza,1);
    %Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
    for j=1:ndata,
        f(j,1)=fuerza(j,1);
    end
    for j=ndata+1:N,
        f(j,1)=0;
    end
    ndata=size(f,1);
end
guidata(handles.tpulso_popupmenu1,handles)
%-----
%-----PROCESO
%-----
%Transformada Rápida de fourier (FFT) para vector f
ft=fft(f);
%Vector de frecuencias fn hasta fNyquist
f=(1:N/2+1)/T;
f=f';
%Vector de Relación espectral kn
wn=2*pi*f;
kn=sqrt(rho/E)*wn;
dim=size(kn,1);

%-----
%-----GRAFICAS DE ANÁLISIS
%-----
%Vector del tiempo para las distintas gráficas
it=[0:2*dT:2*dT*(dim-1)];
il=it*c;
x0=str2double(get(handles.X0_edit8,'String'));
  
```



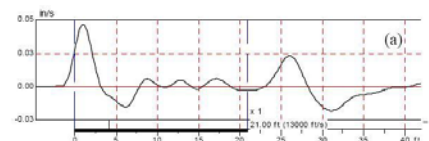
```

if isnan(x0)
    errordlg('Entre un valor numerico para el inicio del analisis')
end
xf=str2double(get(handles.Xf_edit9,'String'));
if isnan(xf)
    errordlg('Entre un valor numerico para el fin del analisis')
end
incremento=round((xf-x0)/5);

%-----SELECCION DEL TIPO DE GRAFICA -----
val=get(handles.tgraficapopupmenu2,'Value');
switch val
case 1
    errordlg('Seleccione una GRAFICA DE... a analizar')
case 2 %-----Gráfica de desplazamiento u(x,t)-----
    contador=0;
    for x=x0:incremento:xf,
        %Ciclo para operar función de transferencia G(x,w)y f-----
        for j=1:dim,
            G(j,1)=(-1/(E*A*i*kn(j,1))*exp((i*kn(j,1)*x)));
            usombbrero(j,1)=ft(j,1)*G(j,1);
        end
        %Vector de desplazamiento u(x,t) al operar la transformada inversa
        u=ifft(usombbrero);
        u=real(u);
        %-----Corrección vector u iniciando en 0
        uinicial=u(1,1);
        for j=1:dim,
            u(j,1)=u(j,1)-uinicial;
        end
        contador=contador+1
        subplot(6,1,contador)
        plot(L,u(1:dim))
        if contador==1
            title('PROPAGACION ONDA EN LOS RANGOS SELECCIONADOS')
        end
        if contador==6
            xlabel('Posición en el Pilote (m)')
        end
        if contador==3
            ylabel('Desplazamiento (m)')
        end
    end
end

case 3 %-----Gráfica de velocidad v(x,t)-----
    contador=0;
    for x=x0:incremento:xf,
        %Ciclo para operar función de transferencia G(x,w)y f-----
        for j=1:dim,
            G(j,1)=(-1/(E*A*i*kn(j,1))*exp((i*kn(j,1)*x)));
            usombbrero(j,1)=ft(j,1)*G(j,1);
        end
        %-----Ciclo para calcular velocidad espectral
        for j=1:dim,
            upunto(j,1)=usombbrero(j,1)*i*wn(j,1);
        end
        %Vector de velocidad v(x,t)al operar la transformada inversa
        vel=ifft(upunto);
    end
end

```



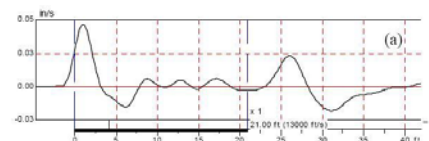
```

    vel=real(vel);
    %-----Corrección vector vel iniciando en 0
    velinicial=vel(1,1);
    for j=1:dim,
        vel(j,1)=vel(j,1)-velinicial;
    end
    contador=contador+1;
    subplot(6,1,contador)
    plot(iL,vel(1:dim))
    if contador==1
        title('PROPAGACION ONDA EN LOS RANGOS SELECCIONADOS')
    end
    if contador==6
        xlabel('Posición en el Pilote (m)')
    end
    if contador==3
        ylabel('Velocidad (m/s)')
    end
    end
end

case 4 %-----Gráfica de aceleracion a(x,t)-----
    contador=0;
    for x=x0:incremento:xf,
        %Ciclo para operar función de transferencia G(x,w) y f-----
        for j=1:dim,
            G(j,1)=(-1/(E*A*i*kn(j,1))*exp(i*kn(j,1)*x));
            usombrero(j,1)=ft(j,1)*G(j,1);
        end
        %-----Ciclo para calcular aceleracion espectral
        for j=1:dim,
            udospuntos(j,1)=usombrero(j,1)*i^2*wn(j,1)^2;
        end
        %Vector de aceleracion a(x,t)al operar la transformada inversa
        accel=ifft(udospuntos);
        accel=real(accel);
        %-----Corrección vector aceleracion iniciando en 0
        accelinicial=accel(1,1);
        for j=1:dim,
            accel(j,1)=accel(j,1)/9.81-accelinicial/9.81;
        end
        contador=contador+1;
        subplot(6,1,contador)
        plot(iL,accel(1:dim))
        if contador==1
            title('PROPAGACION ONDA EN LOS RANGOS SELECCIONADOS')
        end
        if contador==6
            xlabel('Posición en el Pilote (m)')
        end
        if contador==3
            ylabel('Aceleracion (G)')
        end
    end
end

case 5 %-----Gráfica de esfuerzos sigma(x,t)-----
    contador=0;
    for x=x0:incremento:xf,
        %Ciclo para operar función de transferencia G(x,w) y f-----

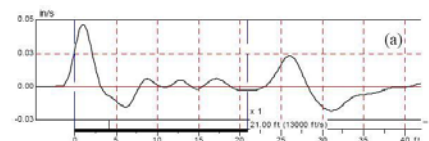
```



```

for j=1:dim,
    G(j,1)=(-1/(E*A*i*kn(j,1))*exp((i*kn(j,1)*x)));
    usombbrero(j,1)=ft(j,1)*G(j,1);
end
%-----Ciclo para calcular esfuerzo espectral
for j=1:dim,
    stress(j,1)=-i*kn(j,1)*E*usombbrero(j,1);
end
%Vector de esfuerzos sigma(x,t)al operar la transformada inversa
esfuerzos=ifft(stress);
esfuerzos=real(esfuerzos);
%-----Corrección vector esfuerzos iniciando en 0
esfuerzosinicial=esfuerzos(1,1);
for j=1:dim,
    esfuerzos(j,1)=esfuerzos(j,1)-esfuerzosinicial;
end
contador=contador+1;
subplot(6,1,contador)
plot(iL,esfuerzos(1:dim)/1000)
if contador==1
    title('PROPAGACION ONDA EN LOS RANGOS SELECCIONADOS')
end
if contador==6
    xlabel('Posición en el Pilote (m)')
end
if contador==3
    ylabel('Esfuerzos (kPa)')
end
end
end

case 6
contador=0;
for x=x0:incremento:xf,
%Ciclo para operar función de transferencia G(x,w)y f-----
for j=1:dim,
    G(j,1)=(-1/(E*A*i*kn(j,1))*exp((i*kn(j,1)*x)));
    usombbrero(j,1)=ft(j,1)*G(j,1);
end
%-----Ciclo para calcular deformacion espectral
for j=1:dim,
    strain(j,1)=-i*kn(j,1)*usombbrero(j,1);
end
%Vector de deformación e(x,t)al operar la transformada inversa
deformacion=ifft(strain);
deformacion=real(deformacion);
%-----Corrección vector deformacion iniciando en 0
deformacioninicial=deformacion(1,1);
for j=1:dim,
    deformacion(j,1)=deformacion(j,1)*100-deformacioninicial*100;
end
contador=contador+1;
subplot(6,1,contador)
plot(iL,deformacion(1:dim))
if contador==1
    title('PROPAGACION ONDA EN LOS RANGOS SELECCIONADOS')
end
if contador==6
    xlabel('Posición en el Pilote (m)')
end
end
end
  
```



```

    end
    if contador==3
        ylabel('Deformacion (%)')
    end
end
end

case 7
    contador=0;
    for x=x0:incremento:xf,
        %Ciclo para operar función de transferencia G(x,w)y f-----
        for j=1:dim,
            G(j,1)=(-1/(E*A*i*kn(j,1))*exp((i*kn(j,1)*x)));
            usombbrero(j,1)=ft(j,1)*G(j,1);
        end
        %-----Ciclo para calcular fuerza espectral
        for j=1:dim,
            force(j,1)=-i*kn(j,1)*E*A*usombbrero(j,1);
        end
        %Vector de fuerzas F(x,t)al operar la transformada inversa
        fuerza=ifft(force);
        fuerza=real(fuerza);
        %-----Corrección vector esfuerzos iniciando en 0
        fuerzainicial=fuerza(1,1);
        for j=1:dim,
            fuerza(j,1)=fuerza(j,1)-fuerzainicial;
        end
        contador=contador+1;
        subplot(6,1,contador)
        plot(iL,fuerza(1:dim)/1000)
        if contador==1
            title('PROPAGACION ONDA EN LOS RANGOS SELECCIONADOS')
        end
        if contador==6
            xlabel('Posición en el Pilote (m)')
        end
        if contador==3
            ylabel('Fuerza (kN)')
        end
    end
end

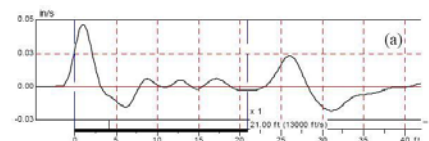
case 8
    errordlg('ESTA OPCION NO ESTA DISPONIBLE')
end
guidata(handles.tgrafica_popupmenu2,handles)

% -----
function varargout = ZX_edit10_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.ZX_edit10.

% -----
function varargout = phi1_edit11_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.phi1_edit11.

% -----
function varargout = phi2_edit13_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.phi2_edit13.

```



```

% -----
function varargout = Ks_edit15_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.Ks_edit15.

% -----
function varargout = Kp_edit16_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.Kp_edit16.

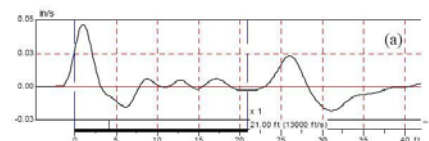
% -----
function varargout = eta_edit17_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.eta_edit17.

% -----
function varargout = tPIT_popupmenu3_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.tPIT_popupmenu3.

% -----
function varargout = N_edit18_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.eta_edit17.

% -----
function varargout = gPIT_togglebutton4_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.gPIT_togglebutton4.

%-----OBTENCION DE LOS PARAMETROS DE ENTRADA-----
L=str2double(get(handles.L_edit1,'String'))*2;
if isnan(L)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Longitud')
end
phi1=str2double(get(handles.phi1_edit11,'String'));
if isnan(phi1)
    errordlg('Entre un valor numerico para el Diametro 1')
end
phi2=str2double(get(handles.phi2_edit13,'String'));
if isnan(phi1)
    errordlg('Entre un valor numerico para el Diametro 2')
end
rho=str2double(get(handles.rho_edit3,'String'));
if isnan(rho)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Densidad')
end
E=str2double(get(handles.E_edit4,'String'))*1e9;
if isnan(E)
    errordlg('Entre un valor numerico el Mod. de Elasticidad')
end
fmax=str2double(get(handles.fmax_edit5,'String'))*1e3;
if isnan(fmax)
    errordlg('Entre un valor numerico para la Fuerza de contacto')
end
tc=str2double(get(handles.tc_edit6,'String'));
if isnan(tc)
    errordlg('Entre un valor numerico para el Tiempo de contacto')
end
ZX=str2double(get(handles.ZX_edit10,'String'));
if isnan(ZX)
    errordlg('Entre un valor numerico para la posicion de impedancia')
end
Ks=str2double(get(handles.Ks_edit15,'String'));
  
```





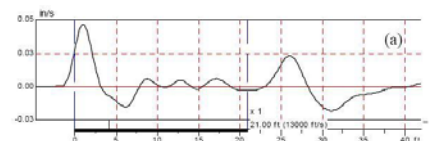
```

if isnan(Ks)
    errordlg('Entre un valor numerico para el K del suelo circundante')
end
Kp=str2double(get(handles.Kp_edit16,'String'));
if isnan(Kp)
    errordlg('Entre un valor numerico para el K en la punta del pilote')
end
eta=str2double(get(handles.eta_edit17,'String'));
if isnan(eta)
    errordlg('Entre un valor numerico para la constante de amortiguamiento del pilote')
end
exponente=str2double(get(handles.N_edit18,'String'));
if isnan(exponente)
    errordlg('Entre un valor numerico del exponente para las divisiones del pulso inicial')
end

%-----CALCULO DE ALGUNOS PARAMETROS NECESARIOS-----
%Cálculo velocidad de onda en el concreto
c=sqrt(E/rho);
N=2^exponente
%-----PRIMERA SECCION-----

%Calculo del area
A1=pi/4*phi1^2;
%Longitud
Lseccion1=2*ZX;
%Tiempo de llegada de la onda al defecto
tdefecto1=Lseccion1/c;
%Calculo de la impedancia
Z1=E*A1/c;

%-----SELECCION DEL TIPO DE PULSO A ANALIZAR-----
val=get(handles.tpulso_popupmenu1,'Value');
switch val
case 1
    errordlg('Seleccione un TIPO DE PULSO a generar')
case 2 %Pulso Tipo Fuerza Instantanea
    %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
    N=2^exponente;
    %-----Periodo T1 de la senal hasta 2*tdefecto1
    T1=2*tdefecto1;
    %Incremento de tiempo
    dT1=T1/N;
    %Vector de tiempo para fuerza de contacto
    vtiempo1=[0:dT1:tc]';
    ntiempo1=size(vtiempo1,1);
    %Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
    fuerza1=zeros(ntiempo1,1);
    fuerza1(round(ntiempo1/2),1)=fmax;
    %Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
    ndata1=size(fuerza1,1);
    %Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
    for j=1:ndata1,
        f1(j,1)=fuerza1(j,1);
    end
  
```



```

for j=ndata1+1:N,
    f1(j,1)=0;
end
  
```

case 3 %Pulso Tipo Triangular

```

%Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
N=2^exponente;
%-----Periodo T1 de la senal hasta 2*tdefecto1
T1=2*tdefecto1;
%Incremento de tiempo
dT1=T1/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo1=[0:dT1:tc]';
ntiempo1=size(vtiempo1,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
for j=1:round(ntiempo1/2),
    fuerza1(j,1)=fmax/(tc/2)*(j-1)*dT1;
end
for j=round(ntiempo1/2):ntiempo1,
    fuerza1(j,1)=-fmax/(tc/2)*(j-1)*dT1+2*fmax;
end
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata1=size(fuerza1,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata1,
    f1(j,1)=fuerza1(j,1);
end
for j=ndata1+1:N,
    f1(j,1)=0;
end
  
```

case 4 %Pulso Tipo Rectangular

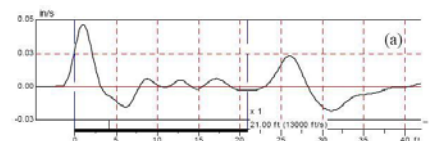
```

%Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
N=2^exponente;
%-----Periodo T1 de la senal hasta 2*tdefecto1
T1=2*tdefecto1;
%Incremento de tiempo
dT1=T1/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo1=[0:dT1:tc]';
ntiempo1=size(vtiempo1,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
fuerza1=zeros(ntiempo1,1);
for j=2:ntiempo1,
    fuerza1(j,1)=fmax;
end
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata1=size(fuerza1,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata1,
    f1(j,1)=fuerza1(j,1);
end
for j=ndata1+1:N,
    f1(j,1)=0;
end
  
```

case 5 %Pulso Tipo Medio Seno

```

%Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
  
```

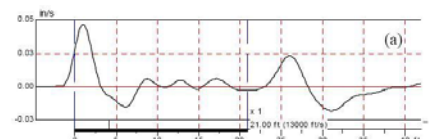


```

N=2^exponente;
%-----Periodo T1 de la senal hasta 2*tdefecto1
T1=2*tdefecto1;
%Incremento de tiempo
dT1=T1/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo1=[0:dT1:tc]';
ntiempo1=size(vtiempo1,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
fuerza1=fmax*sin(pi*vtiempo1/tc);
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata1=size(fuerza1,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata1,
    f1(j,1)=fuerza1(j,1);
end
for j=ndata1+1:N,
    f1(j,1)=0;
end
end
guidata(handles.tpulso_popupmenu1,handles)

%-----
%-----SEGUNDA SECCION-----
%-----
%Calculo del area de la primera seccion
A2=pi/4*phi2^2;
%Longitud
Lseccion2=L-2*ZX;
%Tiempo de llegada de la onda al defecto
tdefecto2=Lseccion2/c;
%Calculo de la impedancia
Z2=E*A2/c;
Z3=str2double(get(handles.Kp_edit16,'String'));

%-----SELECCION DEL TIPO DE PULSO A ANALIZAR-----
val=get(handles.tpulso_popupmenu1,'Value');
switch val
case 2 %Pulso Tipo Fuerza Instantanea
    %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
    N=2^exponente;
    %-----Periodo T1 de la senal hasta 2*tdefecto1
    T2=2*tdefecto2;
    %Incremento de tiempo
    dT2=T2/N;
    %Vector de tiempo para fuerza de contacto
    vtiempo2=[0:dT2:tc]';
    ntiempo2=size(vtiempo2,1);
    %Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
    fuerza2=zeros(ntiempo2,1);
    fuerza2(round(ntiempo2/2),1)=fmax;
    %Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
    ndata2=size(fuerza2,1);
    %Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
    for j=1:ndata2,
        f2(j,1)=fuerza2(j,1);
    end
    for j=ndata2+1:N,
  
```



```

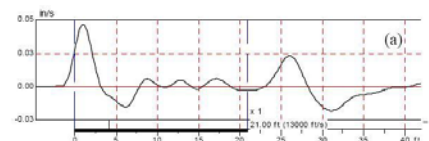
    f2(j,1)=0;
  end

case 3 %Pulso Tipo Triangular
  %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
  N=2^exponente;
  %-----Periodo T1 de la senal hasta 2*tdefecto1
  T2=2*tdefecto2;
  %Incremento de tiempo
  dT2=T2/N;
  %Vector de tiempo para fuerza de contacto
  vtiempo2=[0:dT2:tc];
  ntiempo2=size(vtiempo2,1);
  %Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
  for j=1:round(ntiempo2/2),
    fuerza2(j,1)=fmax/(tc/2)*(j-1)*dT2;
  end
  for j=round(ntiempo2/2):ntiempo2,
    fuerza2(j,1)=-fmax/(tc/2)*(j-1)*dT2+2*fmax;
  end
  %Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
  ndata2=size(fuerza2,1);
  %Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
  for j=1:ndata2,
    f2(j,1)=fuerza2(j,1);
  end
  for j=ndata2+1:N,
    f2(j,1)=0;
  end

case 4 %Pulso Tipo Rectangular
  %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
  N=2^exponente;
  %-----Periodo T1 de la senal hasta 2*tdefecto1
  T2=2*tdefecto2;
  %Incremento de tiempo
  dT2=T2/N;
  %Vector de tiempo para fuerza de contacto
  vtiempo2=[0:dT2:tc];
  ntiempo2=size(vtiempo2,1);
  %Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
  fuerza2=zeros(ntiempo2,1);
  for j=2:ntiempo2,
    fuerza2(j,1)=fmax;
  end
  %Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
  ndata2=size(fuerza2,1);
  %Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
  for j=1:ndata2,
    f2(j,1)=fuerza2(j,1);
  end
  for j=ndata2+1:N,
    f2(j,1)=0;
  end

case 5 %Pulso Tipo Medio Seno
  %Numero de divisiones de la serie de tiempo (Senal)
  N=2^exponente;

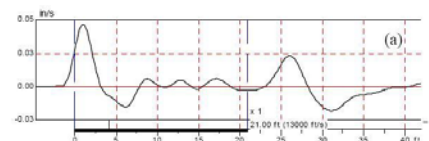
```



```

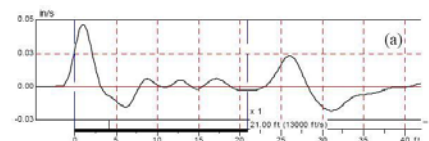
%-----Periodo T1 de la senal hasta 2*tdefecto1
T2=2*tdefecto2;
%Incremento de tiempo
dT2=T2/N;
%Vector de tiempo para fuerza de contacto
vtiempo2=[0:dT2:tc];
ntiempo2=size(vtiempo2,1);
%Vector de fuerza respecto al vector del tiempo
fuerza2=fmax*sin(pi*vtiempo2/tc);
%Calculo de cantidad de puntos de Fuerza
ndata2=size(fuerza2,1);
%Generación de la serie de tiempo (Senal) en el periodo T=2L/c
for j=1:ndata2,
    f2(j,1)=fuerza2(j,1);
end
for j=ndata2+1:N,
    f2(j,1)=0;
end
end
guidata(handles.tpulso_popupmenu1,handles)

%-----
%-----PROCESO
%-----
%Transformada Rápida de fourier (FFT) para vectores fn
ft1=fft(f1);
dimft1=size(ft1)
ft2=fft(f2);
dimft2=size(ft2)
%-----Vector de frecuencias fn hasta fNyquist para sección1
frec1=(1:N/2+1)/T1;
frec1=frec1';
%Vector de Relación espectral kn
wn1=2*pi*frec1;
for j=1:N/2+1,
    kn1(j,1)=(sqrt(wn1(j,1)^2*rho/E-Ks/(E*A1)+i*wn1(j,1)*eta/(E*A1)))';
end
%-----Vector de frecuencias fn hasta fNyquist para sección2
frec2=(1:N/2+1)/T2;
frec2=frec2';
%Vector de Relación espectral kn
wn2=2*pi*frec2;
for j=1:N/2+1,
    kn2(j,1)=(sqrt(wn2(j,1)^2*rho/E-Ks/(E*A2)+i*wn2(j,1)*eta/(E*A2)))';
end
%-----Ciclo para graficar resultados-----
x=0;
%-----Grafica sección 1
dim1=size(kn1,1);
G11=zeros(dim1,1);
G21=zeros(dim1,1);
usombbrero1=zeros(dim1,1);
upunto1=zeros(dim1,1);
%Ciclo para operar función de transferencia y f-----
for j=1:dim1,
    G11(j,1)=(-1/(E*A1*i*kn1(j,1))*exp(+i*kn1(j,1)*x));
    G21(j,1)=(-1/(E*A1*i*kn1(j,1))*exp(-i*kn1(j,1)*(x+Lseccion1)))';
    usombbrero1(j,1)=ft1(j,1)*G11(j,1)+ft1(j,1)*G21(j,1)*(Z2-Z1)/(Z2+Z1);
  
```



```

    upunto1(j,1)=usombbrero1(j,1)*i*wn1(j,1);
  end
  %Vector del tiempo para la Gráfica sección 1
  it1=[0:2*dt1:2*dt1*(dim1-1)];
  %Vector de velocidad v(x,t) al operar la transformada inversa
  vel1=ifft(upunto1);
  vel1=real(vel1);
  %-----Corrección vector vel1 iniciando en 0
  velinicial1=vel1(1,1);
  for j=1:dim1,
    vel1(j,1)=vel1(j,1)-velinicial1;
  end
  val=get(handles.tPIT_popupmenu3,'Value');
  switch val
  case 1
    errorDlg('Seleccione un tipo de GRAFICA PIT a analizar')
  case 2 %Grafica Seccion 1
    plot(it1*1000,vel1(1:dim1)*100)
    title('SIMULACION PRIMERA SECCION')
    xlabel('Tiempo (ms)')
    ylabel('Velocidad de la cabeza (cm/s)')
    grid on
  end
  %-----Grafica seccion 2
  dim2=size(kn2,1);
  G12=zeros(dim2,1);
  G22=zeros(dim2,1);
  usombbrero2=zeros(dim2,1);
  upunto2=zeros(dim2,1);
  %Ciclo para operar función de transferencia y f-----
  for j=1:dim2,
    G12(j,1)=(-1/(E*A2*i*kn2(j,1))*exp(+i*kn2(j,1)*x));
    G22(j,1)=(-1/(E*A2*i*kn2(j,1))*exp(-i*kn2(j,1)*(x+Lseccion2)));
    usombbrero2(j,1)=ft2(j,1)*G12(j,1)*2*Z2/(Z2+Z1)+ft2(j,1)*G22(j,1)*(i*kn2(j,1)*E*A2-
    Kp)/(i*kn2(j,1)*E*A2+Kp)*2*Z2/(Z2+Z1);
    %usombbrero2(j,1)=ft2(j,1)*G12(j,1)*2*Z2/(Z2+Z1)+ft2(j,1)*G22(j,1)*(Z3-Z2)/(Z3+Z2)*2*Z2/(Z2+Z1);
    upunto2(j,1)=usombbrero2(j,1)*i*wn2(j,1);
  end
  %Vector de velocidad v(x,t)
  vel2=ifft(upunto2);
  vel2=real(vel2);
  %Vector del tiempo para la Gráfica sección 2
  it2=[dt1*dim1:2*dt2:dt1*dim1+2*dt2*(dim2-1)];
  %-----Corrección vector vel2 iniciando en 0
  velinicial2=vel2(1,1);
  for j=1:dim2,
    vel2(j,1)=vel2(j,1)-velinicial2;
  end
  val=get(handles.tPIT_popupmenu3,'Value');
  switch val
  case 3 %Grafica Seccion 2
    plot(it2*1000,vel2(1:dim2)*100)
    title('SIMULACION SEGUNDA SECCION')
    xlabel('Tiempo (ms)')
    ylabel('Velocidad de la cabeza (cm/s)')
    grid on
  case 4 %Grafica Secciones 1 y 2
    subplot(1,2,1)
  
```

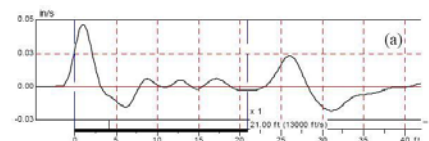


```

plot(it1*1000,vel1(1:dim1)*100)
title('SIMULACION PRIMERA SECCION')
xlabel('Tiempo (ms)')
ylabel('Velocidad de la cabeza (cm/s)')
grid on
subplot(1,2,2)
plot(it2*1000,vel2(1:dim2)*100)
title('SIMULACION SEGUNDA SECCION')
xlabel('Tiempo (ms)')
ylabel('Velocidad de la cabeza (cm/s)')
grid on
end

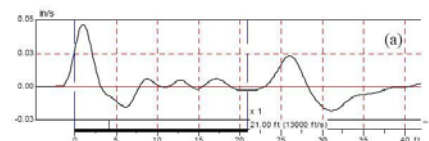
%-----
%-----GRAFICA DEL PILOTE TOTAL
%-----
ndataf1=ceil(ndata1/2);
ndataf2=ceil(ndata2/2);
%Guardar en el vector veltot1 los valores de velocidad de la primera
%sección hasta la longitud de análisis
for j=1:N/4+ndataf1-1,
    veltot1(j,1)=vel1(j,1);
    ittot1(j,1)=it1(j,1);
end
%Guardar en el vector veltot2 los valores de velocidad de la segunda
%sección hasta la longitud de análisis
for j=ndataf2:N/4+ndataf2,
    veltot2(j-ndataf2+1,1)=vel2(j+1,1);
    ittot2(j-ndataf2+1,1)=it2(j+1,1);
end
dimittot2=size(ittot2);
dimveltot1=size(veltot1,1);
dimveltot2=size(veltot2,1);
vel1final=veltot1(dimveltot1,1);
vel2inicial=veltot2(1,1);
difvelocidad12=vel1final-vel2inicial;
dimtotal=dimveltot1+dimveltot2;
%Une las dos gráficas en una sola
for j=1:dimveltot1,
    veltotalpilote(j,1)=veltot1(j,1);
    ittotalpilote(j,1)=ittot1(j,1);
end
for j=dimveltot1+1:dimtotal,
    veltotalpilote(j,1)=veltot2(j-dimveltot1,1)+difvelocidad12;
    ittotalpilote(j,1)=ittot2(j-dimveltot1,1);
end

val=get(handles.tPIT_popupmenu3,'Value');
switch val
case 5 %Gráficas secciones 1,2 y Pilote Total
    subplot(3,1,1)
    plot(it1*1000,vel1(1:dim1)*100)
    title('SIMULACION PRIMERA SECCION')
    grid on
    subplot(3,1,2)
    plot(it2*1000,vel2(1:dim2)*100)
    title('SIMULACION SEGUNDA SECCION')
    ylabel('Velocidad de la cabeza (cm/s)')
  
```



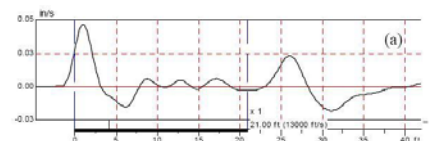
```
grid on
subplot(3,1,3)
plot(ittotalpilote*1000,veltotalpilote(1:dimtotal)*100)
title('SIMULACION PIT PILOTE TOTAL')
xlabel('Tiempo (ms)')
grid on

case 6
iLtotalpilote=ittotalpilote*c/2;
plot(iLtotalpilote,veltotalpilote(1:dimtotal)*100)
title('SIMULACION PIT PILOTE TOTAL')
xlabel('Longitud (m)')
ylabel('Velocidad de la cabeza (cm/s)')
grid on
end
```





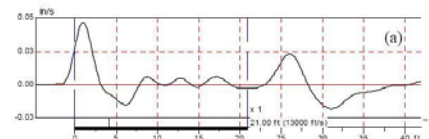
## *ANEXO 2 - Análisis de Rigideces del suelo usando PLAXIS*



Pilote  $\phi =$  0,4m  
 Fuerza Cabeza = 10kN

		$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\bar{\sigma}_{12}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\Delta L$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	$\Delta F$ (kN)
Arcilla Suave	Punta	9,56E-01		9,56E-01		1,26E-01	1,20E-01
	Fuste	6,65E-03	1,28E-02	9,74E-03	1,00E+00	1,26E+00	1,22E-02
Arcilla Dura	Punta	1,39E+00		1,39E+00		1,26E-01	1,75E-01
	Fuste	7,29E-03	1,10E-02	9,12E-03	1,00E+00	1,26E+00	1,15E-02
Arena Suelta	Punta	1,71E+00		1,71E+00		1,26E-01	2,15E-01
	Fuste	1,28E-02	2,48E-02	1,88E-02	1,00E+00	1,26E+00	2,36E-02
Arena Densa	Punta	1,08E+00		1,08E+00		1,26E-01	1,36E-01
	Fuste	1,67E-02	2,99E-02	2,33E-02	1,00E+00	1,26E+00	2,93E-02

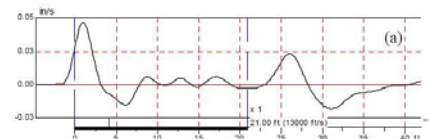
		uy1 (m)	uy2 (m)	$\bar{u}_{y12}$ (m)	K (kN/m)	K(N/m)
Arcilla Suave	Punta	2,03E-05		2,03E-05	5,93E+03	5,93E+06
	Fuste	2,21E-05	2,20E-05	2,21E-05	5,55E+02	5,55E+05
Arcilla Dura	Punta	6,54E-06		6,54E-06	2,67E+04	2,67E+07
	Fuste	8,60E-06	8,30E-06	8,45E-06	1,36E+03	1,36E+06
Arena Suelta	Punta	4,74E-06		4,74E-06	4,53E+04	4,53E+07
	Fuste	5,84E-06	5,56E-06	5,70E-06	4,15E+03	4,15E+06
Arena Densa	Punta	1,74E-06		1,74E-06	7,80E+04	7,80E+07
	Fuste	2,99E-06	2,71E-06	2,85E-06	1,03E+04	1,03E+07



Pilote  $\phi =$  0,4m  
 Fuerza Cabeza = 50kN

		$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{12}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\Delta L$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	$\Delta F$ (kN)
Arcilla Suave	Punta	5,73E+00		5,73E+00		0,1256637	7,20E-01
	Fuste	3,40E-02	6,50E-02	4,95E-02	1	1,26E+00	6,22E-02
Arcilla Dura	Punta	6,53E+00		6,53E+00		0,1256637	8,21E-01
	Fuste	4,10E-02	5,80E-02	4,95E-02	1	1,26E+00	6,22E-02
Arena Suelta	Punta	6,83E+00		6,83E+00		0,1256637	8,58E-01
	Fuste	6,60E-02	1,24E-01	9,50E-02	1	1,26E+00	1,19E-01
Arena Densa	Punta	4,73E+00		4,73E+00		0,1256637	5,94E-01
	Fuste	8,30E-02	1,50E-01	1,17E-01	1	1,26E+00	1,46E-01

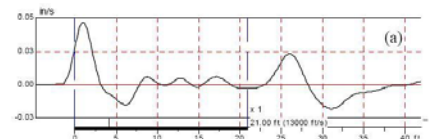
		uy1 (m)	uy2 (m)	$u_{y12}$ (m)	K (kN/m)	K(N/m)
Arcilla Suave	Punta	1,0E-04		1,02E-04	7,09E+03	7094118,6
	Fuste	1,1E-04	1,1E-04	1,10E-04	5,65E+02	564614,09
Arcilla Dura	Punta	3,3E-05		3,27E-05	2,51E+04	25109670
	Fuste	4,3E-05	4,2E-05	4,22E-05	1,47E+03	1474017,4
Arena Suelta	Punta	2,4E-05		2,37E-05	3,62E+04	36199203
	Fuste	3,0E-05	2,9E-05	2,94E-05	4,06E+03	4063326,1
Arena Densa	Punta	8,7E-06		8,72E-06	6,82E+04	68163914
	Fuste	1,5E-05	1,3E-05	1,39E-05	1,05E+04	10502024



Pilote  $\phi = 0,4\text{m}$   
 Fuerza Cabeza = 100kN

		$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{12}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\Delta L$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	$\Delta F$ (kN)
Arcilla Suave	Punta	1,28E+01		1,28E+01		0,1256637	1,61E+00
	Fuste	6,90E-02	1,30E-01	9,95E-02	1	1,26E+00	1,25E-01
Arcilla Dura	Punta	1,50E+01		1,50E+01		0,1256637	1,89E+00
	Fuste	7,90E-02	1,14E-01	9,65E-02	1	1,26E+00	1,21E-01
Arena Suelta	Punta	1,37E+01		1,37E+01		0,1256637	1,72E+00
	Fuste	1,36E-01	2,50E-01	1,93E-01	1	1,26E+00	2,43E-01
Arena Densa	Punta	1,25E+01		1,25E+01		0,1256637	1,57E+00
	Fuste	1,70E-01	3,00E-01	2,35E-01	1	1,26E+00	2,95E-01

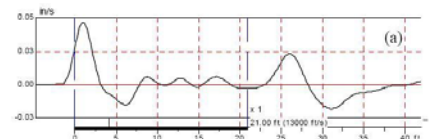
		uy1 (m)	uy2 (m)	$u_{y12}$ (m)	K (kN/m)	K(N/m)
Arcilla Suave	Punta	2,0E-04		2,04E-04	7,90E+03	7904154,5
	Fuste	2,2E-04	2,2E-04	2,20E-04	5,69E+02	568769,25
Arcilla Dura	Punta	6,6E-05		6,56E-05	2,88E+04	28770778
	Fuste	8,6E-05	8,3E-05	8,43E-05	1,44E+03	1438584,5
Arena Suelta	Punta	4,7E-05		4,74E-05	3,63E+04	36320523
	Fuste	6,1E-05	5,9E-05	6,01E-05	4,03E+03	4032437,5
Arena Densa	Punta	1,7E-05		1,74E-05	8,98E+04	89831886
	Fuste	3,0E-05	2,7E-05	2,85E-05	1,04E+04	10350849



Pilote  $\phi =$  0,4m  
 Fuerza Cabeza = 200kN

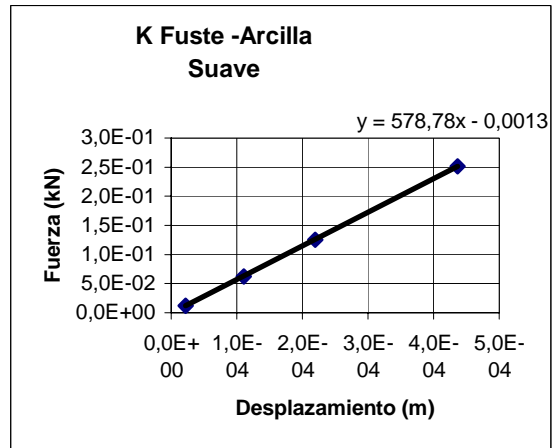
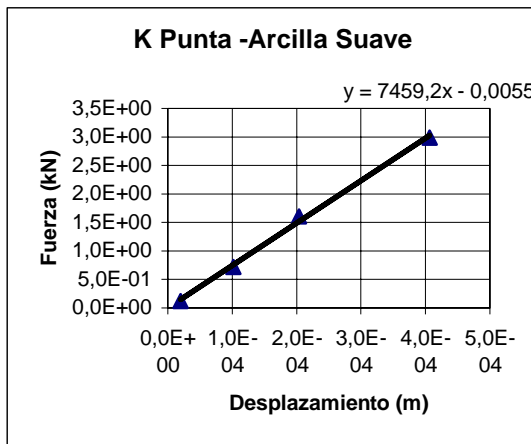
		$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{12}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\Delta L$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	$\Delta F$ (kN)
Arcilla Suave	Punta	2,38E+01		2,38E+01		0,1256637	2,98E+00
	Fuste	1,39E-01	2,62E-01	2,01E-01	1	1,26E+00	2,52E-01
Arcilla Dura	Punta	1,34E+01		1,34E+01		0,1256637	1,68E+00
	Fuste	7,90E-02	1,14E-01	9,65E-02	1	1,26E+00	1,21E-01
Arena Suelta	Punta	3,03E+01		3,03E+01		0,1256637	3,81E+00
	Fuste	2,57E-01	5,00E-01	3,79E-01	1	1,26E+00	4,76E-01
Arena Densa	Punta	2,54E+01		2,54E+01		0,1256637	3,20E+00
	Fuste	3,40E-01	6,00E-01	4,70E-01	1	1,26E+00	5,91E-01

		uy1 (m)	uy2 (m)	$u_{y12}$ (m)	K (kN/m)	K(N/m)
Arcilla Suave	Punta	4,1E-04		4,06E-04	7,35E+03	7349750,1
	Fuste	4,4E-04	4,3E-04	4,37E-04	5,77E+02	577066,14
Arcilla Dura	Punta	6,5E-05		6,55E-05	2,57E+04	25720080
	Fuste	8,6E-05	8,3E-05	8,41E-05	1,44E+03	1441320,2
Arena Suelta	Punta	9,5E-05		9,49E-05	4,01E+04	40143493
	Fuste	1,2E-04	1,2E-04	1,20E-04	3,96E+03	3963642,7
Arena Densa	Punta	3,5E-05		3,49E-05	9,16E+04	91617777
	Fuste	5,9E-05	5,4E-05	5,67E-05	1,04E+04	10424842

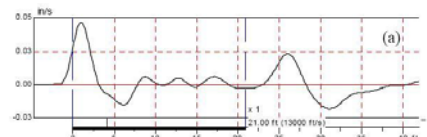
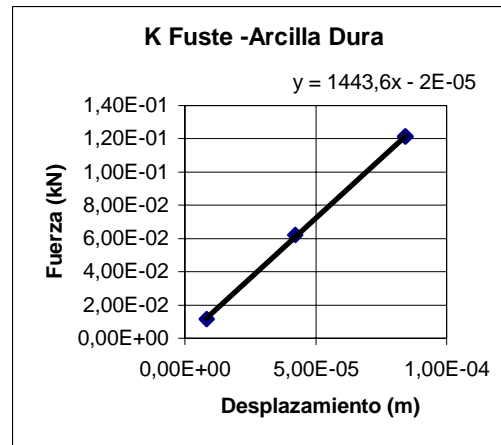
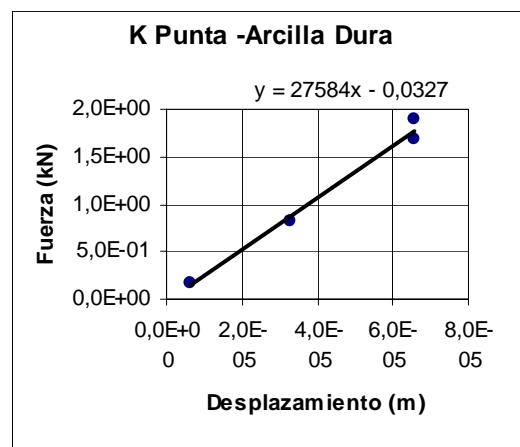


**RESUMEN**

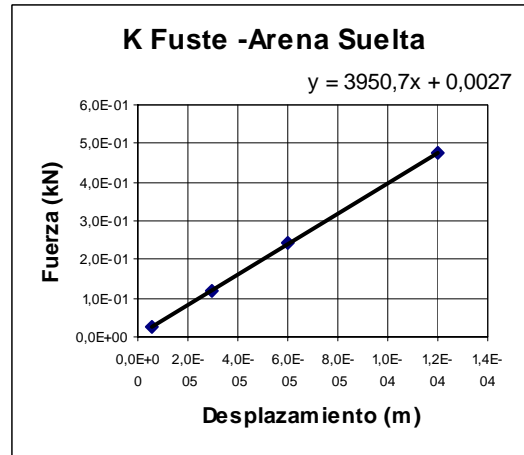
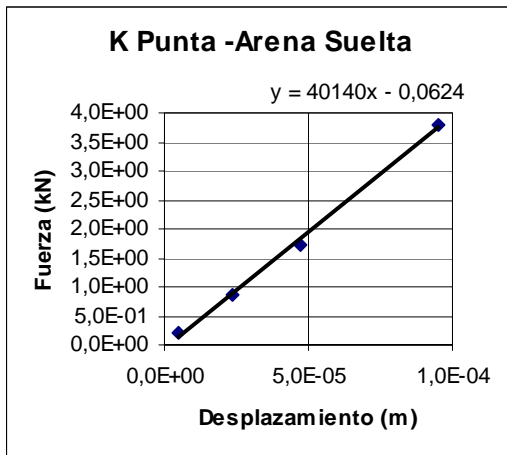
		$\bar{u}_{y12}$		$\bar{u}_{y12}$		
		$\Delta F(\text{kN})$	(m)	$\Delta F(\text{kN})$	(m)	
<b>Arcilla Suave</b>	Punta	1,20E-01	2,03E-05	Fuste	1,22E-02	2,21E-05
	Punta	7,20E-01	1,02E-04	Fuste	6,22E-02	1,10E-04
	Punta	1,61E+00	2,04E-04	Fuste	1,25E-01	2,20E-04
	Punta	2,98E+00	4,06E-04	Fuste	2,52E-01	4,37E-04



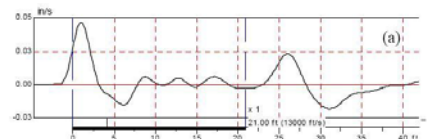
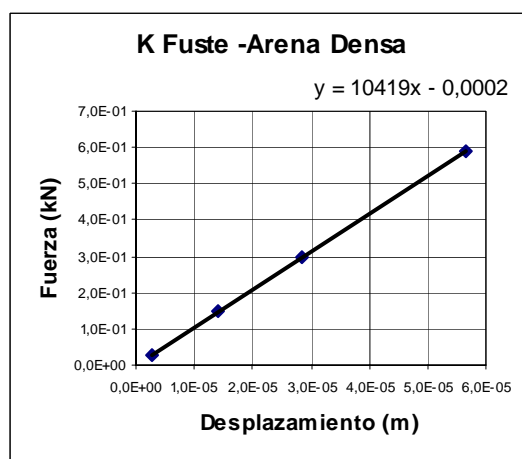
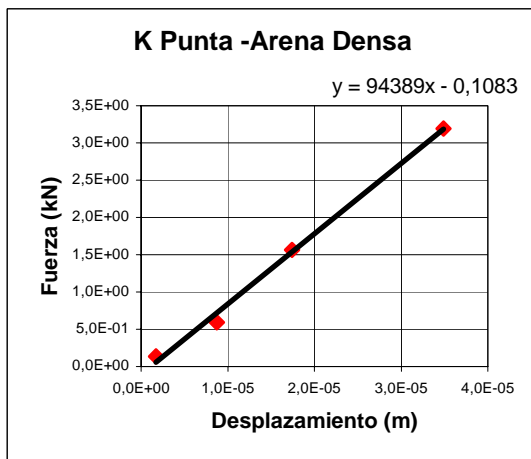
		$\bar{u}_{y12}$		$\bar{u}_{y12}$		
		$\Delta F(\text{kN})$	(m)	$\Delta F(\text{kN})$	(m)	
<b>Arcilla Dura</b>	Punta	1,75E-01	6,54E-06	Fuste	1,15E-02	8,45E-06
	Punta	8,21E-01	3,27E-05	Fuste	6,22E-02	4,22E-05
	Punta	1,89E+00	6,56E-05	Fuste	1,21E-01	8,43E-05
	Punta	1,68E+00	6,55E-05	Fuste	1,21E-01	8,41E-05

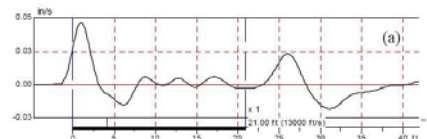
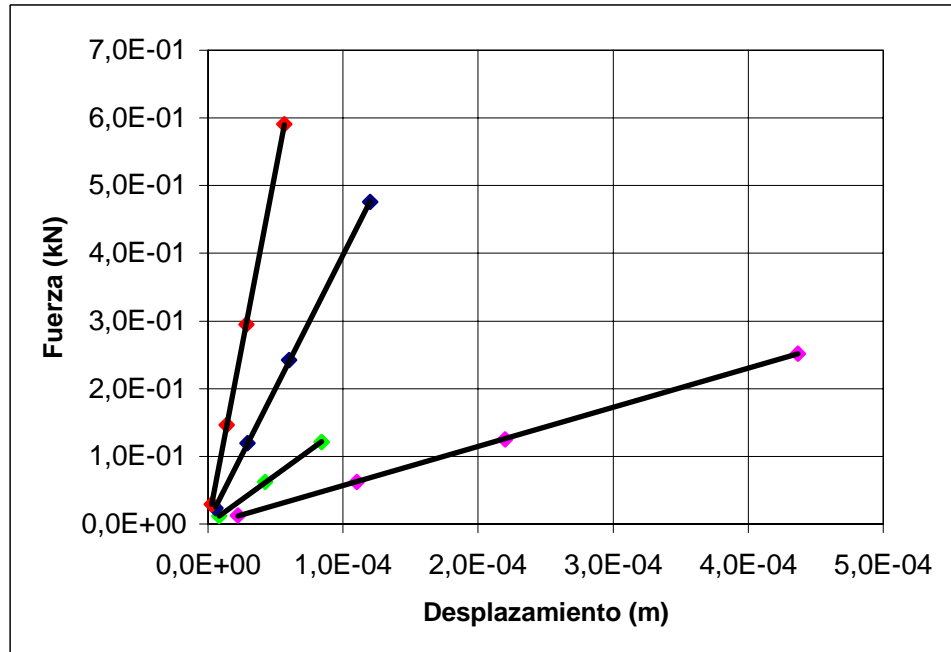
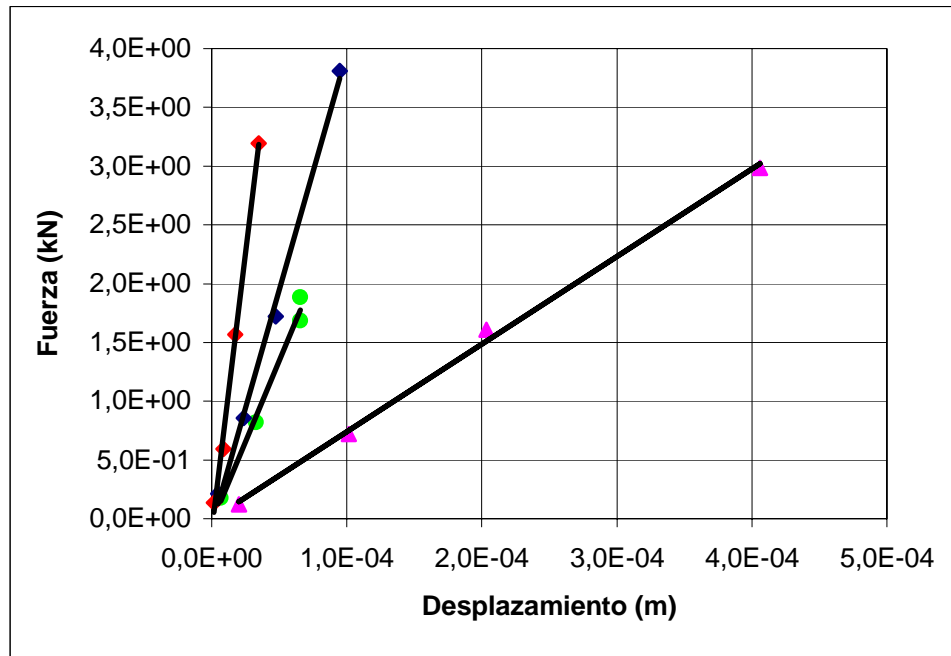


		$\overline{u}_{y12}$		$\overline{u}_{y12}$		
		$\Delta F(kN)$	(m)	$\Delta F(kN)$	(m)	
<b>Arena Suelta</b>	Punta	2,15E-01	4,74E-06	Fuste	2,36E-02	5,70E-06
	Punta	8,58E-01	2,37E-05	Fuste	1,19E-01	2,94E-05
	Punta	1,72E+00	4,74E-05	Fuste	2,43E-01	6,01E-05
	Punta	3,81E+00	9,49E-05	Fuste	4,76E-01	1,20E-04



		$\overline{u}_{y12}$		$\overline{u}_{y12}$		
		$\Delta F(kN)$	(m)	$\Delta F(kN)$	(m)	
<b>Arena Densa</b>	Punta	1,36E-01	1,74E-06	Fuste	2,93E-02	2,85E-06
	Punta	5,94E-01	8,72E-06	Fuste	1,46E-01	1,39E-05
	Punta	1,57E+00	1,74E-05	Fuste	2,95E-01	2,85E-05
	Punta	3,20E+00	3,49E-05	Fuste	5,91E-01	5,67E-05



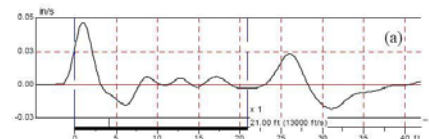




Pilote  $\phi =$  1m  
 Fuerza Cabeza = 10kN

		$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\bar{\sigma}_{12}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\Delta L$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	$\Delta F$ (kN)
Arcilla Suave	Punta	2,83E+00		2,83E+00		7,85E-01	2,22E+00
	Fuste	1,98E-02	4,08E-02	3,03E-02	1,00E+00	3,14E+00	9,52E-02
Arcilla Dura	Punta	5,38E+00		5,38E+00		7,85E-01	4,23E+00
	Fuste	1,35E-02	2,11E-02	1,73E-02	1,00E+00	3,14E+00	5,43E-02
Arena Suelta	Punta	2,17E+00		2,17E+00		7,85E-01	1,70E+00
	Fuste	6,00E-02	1,30E-01	9,50E-02	1,00E+00	3,14E+00	2,98E-01
Arena Densa	Punta	3,60E+00		3,60E+00		7,85E-01	2,83E+00
	Fuste	6,94E-02	1,42E-01	1,06E-01	1,00E+00	3,14E+00	3,32E-01

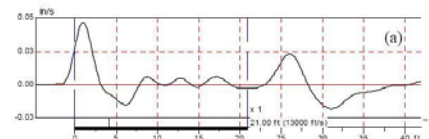
		uy1 (m)	uy2 (m)	$\bar{u}_{y12}$ (m)	K (kN/m)	K(N/m)
Arcilla Suave	Punta	1,17E-04		1,17E-04	1,89E+04	1,89E+07
	Fuste	1,20E-04	1,20E-04	1,20E-04	7,94E+02	7,94E+05
Arcilla Dura	Punta	3,03E-05		3,03E-05	1,39E+05	1,39E+08
	Fuste	3,30E-05	3,27E-05	3,29E-05	1,65E+03	1,65E+06
Arena Suelta	Punta	1,61E-05		1,61E-05	1,06E+05	1,06E+08
	Fuste	1,73E-05	1,69E-05	1,71E-05	1,75E+04	1,75E+07
Arena Densa	Punta	6,70E-06		6,70E-06	4,22E+05	4,22E+08
	Fuste	7,84E-06	7,60E-06	7,72E-06	4,30E+04	4,30E+07



Pilote  $\phi =$  1m  
 Fuerza Cabeza = 50kN

		$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{12}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\Delta L$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	$\Delta F$ (kN)
Arcilla Suave	Punta	3,00E+01		3,00E+01		7,85E-01	2,35E+01
	Fuste	9,40E-02	2,00E-01	1,47E-01	1,00E+00	3,14E+00	4,62E-01
Arcilla Dura	Punta	2,05E+01		2,05E+01		7,85E-01	1,61E+01
	Fuste	6,70E-02	1,06E-01	8,65E-02	1,00E+00	3,14E+00	2,72E-01
Arena Suelta	Punta	1,12E+01		1,12E+01		7,85E-01	8,77E+00
	Fuste	3,00E-01	6,40E-01	4,70E-01	1,00E+00	3,14E+00	1,48E+00
Arena Densa	Punta	1,16E+01		1,16E+01		7,85E-01	9,09E+00
	Fuste	3,50E-01	7,20E-01	5,35E-01	1,00E+00	3,14E+00	1,68E+00

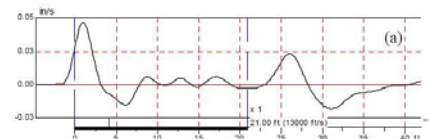
		uy1 (m)	uy2 (m)	$u_{y12}$ (m)	K (kN/m)	K(N/m)
Arcilla Suave	Punta	5,90E-04		5,90E-04	3,99E+04	3,99E+07
	Fuste	6,02E-04	6,00E-04	6,01E-04	7,68E+02	7,68E+05
Arcilla Dura	Punta	1,52E-04		1,52E-04	1,06E+05	1,06E+08
	Fuste	1,65E-04	1,63E-04	1,64E-04	1,66E+03	1,66E+06
Arena Suelta	Punta	8,06E-05		8,06E-05	1,09E+05	1,09E+08
	Fuste	8,69E-05	8,57E-05	8,63E-05	1,71E+04	1,71E+07
Arena Densa	Punta	3,34E-05		3,34E-05	2,72E+05	2,72E+08
	Fuste	4,01E-05	3,88E-05	3,95E-05	4,26E+04	4,26E+07



Pilote  $\phi =$  1m  
 Fuerza Cabeza = 100kN

		$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{12}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\Delta L$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	$\Delta F$ (kN)
Arcilla Suave	Punta	2,45E+01		2,45E+01		7,85E-01	1,92E+01
	Fuste	9,70E-02	2,00E-01	1,49E-01	1,00E+00	3,14E+00	4,67E-01
Arcilla Dura	Punta	4,64E+01		4,64E+01		7,85E-01	3,64E+01
	Fuste	1,30E-01	2,05E-01	1,68E-01	1,00E+00	3,14E+00	5,26E-01
Arena Suelta	Punta	1,63E+01		1,63E+01		7,85E-01	1,28E+01
	Fuste	6,00E-01	1,22E+00	9,10E-01	1,00E+00	3,14E+00	2,86E+00
Arena Densa	Punta	2,09E+01		2,09E+01		7,85E-01	1,64E+01
	Fuste	6,90E-01	1,40E+00	1,05E+00	1,00E+00	3,14E+00	3,28E+00

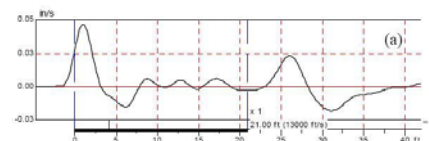
		uy1 (m)	uy2 (m)	$u_{y12}$ (m)	K (kN/m)	K(N/m)
Arcilla Suave	Punta	5,88E-04		5,88E-04	3,27E+04	3,27E+07
	Fuste	6,00E-04	5,98E-04	5,99E-04	7,79E+02	7,79E+05
Arcilla Dura	Punta	3,03E-04		3,03E-04	1,20E+05	1,20E+08
	Fuste	3,30E-04	3,26E-04	3,28E-04	1,60E+03	1,60E+06
Arena Suelta	Punta	1,61E-04		1,61E-04	7,94E+04	7,94E+07
	Fuste	1,74E-04	1,72E-04	1,73E-04	1,65E+04	1,65E+07
Arena Densa	Punta	6,68E-05		6,68E-05	2,46E+05	2,46E+08
	Fuste	8,15E-05	7,93E-05	8,04E-05	4,08E+04	4,08E+07



Pilote  $\phi = 1\text{ m}$   
 Fuerza Cabeza = 200kN

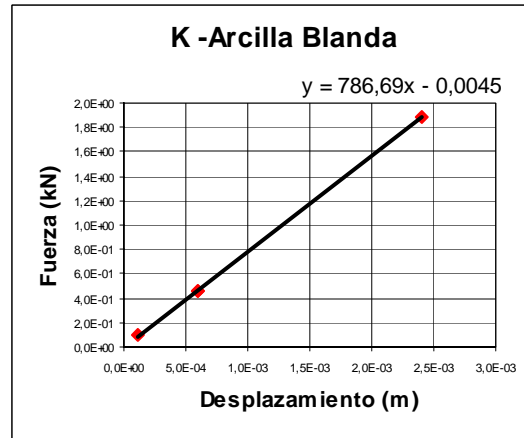
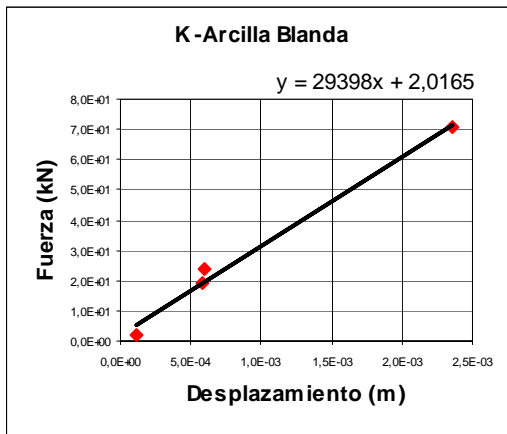
		$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{12}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\Delta L$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	$\Delta F$ (kN)
Arcilla Suave	Punta	8,98E+01		8,98E+01		7,85E-01	7,05E+01
	Fuste	3,90E-01	8,10E-01	6,00E-01	1,00E+00	3,14E+00	1,88E+00
Arcilla Dura	Punta	6,59E+01		6,59E+01		7,85E-01	5,18E+01
	Fuste	2,70E-01	4,30E-01	3,50E-01	1,00E+00	3,14E+00	1,10E+00
Arena Suelta	Punta	5,07E+01		5,07E+01		7,85E-01	3,98E+01
	Fuste	1,18E+00	2,54E+00	1,86E+00	1,00E+00	3,14E+00	5,84E+00
Arena Densa	Punta	3,71E+01		3,71E+01		7,85E-01	2,92E+01
	Fuste	1,42E+00	2,86E+00	2,14E+00	1,00E+00	3,14E+00	6,72E+00

		uy1 (m)	uy2 (m)	$u_{y12}$ (m)	K (kN/m)	K(N/m)
Arcilla Suave	Punta	2,36E-03		2,36E-03	2,99E+04	2,99E+07
	Fuste	2,40E-03	2,40E-03	2,40E-03	7,85E+02	7,85E+05
Arcilla Dura	Punta	6,05E-04		6,05E-04	8,55E+04	8,55E+07
	Fuste	6,60E-04	6,53E-04	6,57E-04	1,67E+03	1,67E+06
Arena Suelta	Punta	3,22E-04		3,22E-04	1,24E+05	1,24E+08
	Fuste	3,49E-04	3,43E-04	3,46E-04	1,69E+04	1,69E+07
Arena Densa	Punta	1,33E-04		1,33E-04	2,19E+05	2,19E+08
	Fuste	1,59E-04	1,54E-04	1,56E-04	4,30E+04	4,30E+07

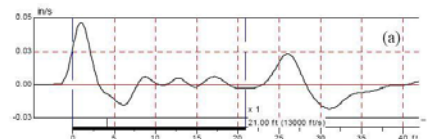
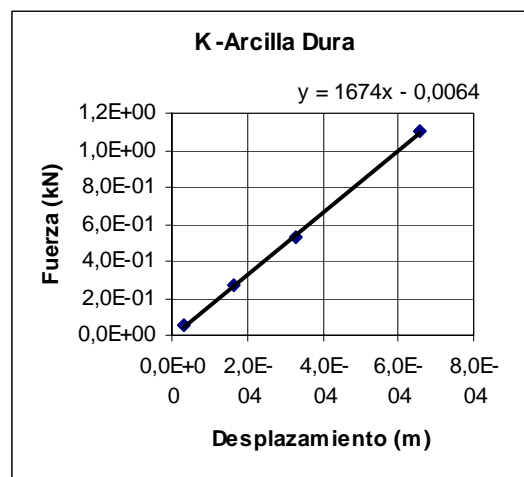
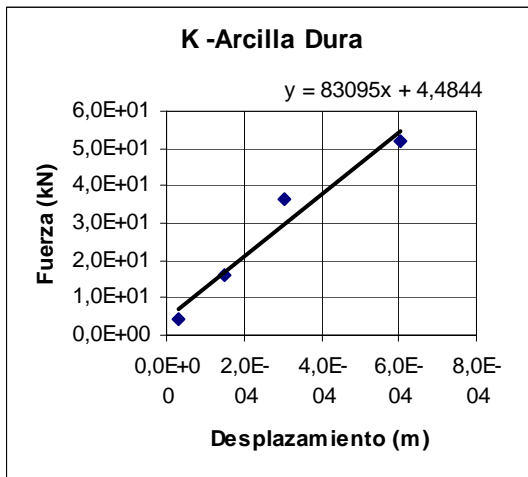


**RESUMEN**

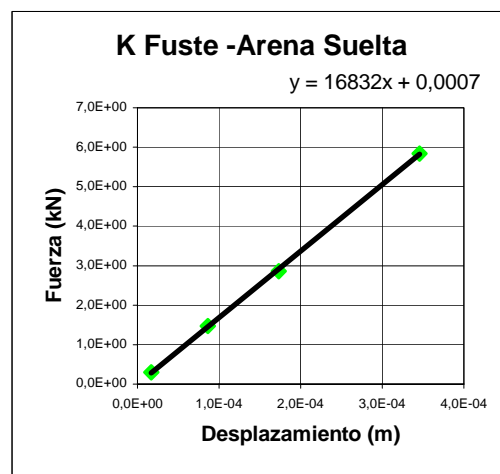
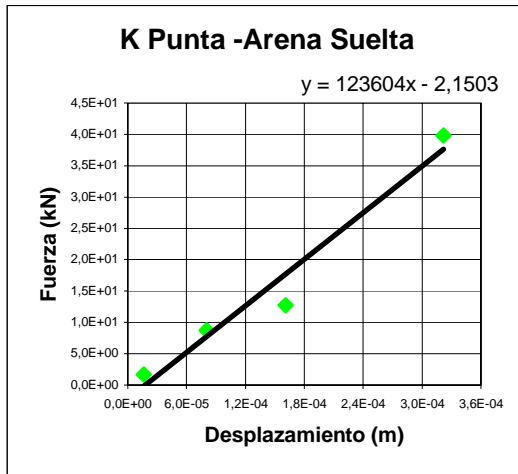
		$\overline{u}_{y12}$		$\overline{u}_{y12}$		
		$\Delta F(kN)$	(m)	$\Delta F(kN)$	(m)	
<b>Arcilla Suave</b>	<b>Punta</b>	2,22E+00	1,17E-04	Fuste	9,52E-02	1,20E-04
	<b>Punta</b>	2,35E+01	5,90E-04	Fuste	4,62E-01	6,01E-04
	<b>Punta</b>	1,92E+01	5,88E-04	Fuste	4,67E-01	5,99E-04
	<b>Punta</b>	7,05E+01	2,36E-03	Fuste	1,88E+00	2,40E-03



		$\overline{u}_{y12}$		$\overline{u}_{y12}$		
		$\Delta F(kN)$	(m)	$\Delta F(kN)$	(m)	
<b>Arcilla Dura</b>	<b>Punta</b>	4,23E+00	3,03E-05	Fuste	5,43E-02	3,29E-05
	<b>Punta</b>	1,61E+01	1,52E-04	Fuste	2,72E-01	1,64E-04
	<b>Punta</b>	3,64E+01	3,03E-04	Fuste	5,26E-01	3,28E-04
	<b>Punta</b>	5,18E+01	6,05E-04	Fuste	1,10E+00	6,57E-04



		$\overline{u}_{y12}$		$\overline{u}_{y12}$		
		$\Delta F(\text{kN})$	(m)	$\Delta F(\text{kN})$	(m)	
<b>Arena Suelta</b>	Punta	1,70E+00	1,61E-05	Fuste	2,98E-01	1,71E-05
	Punta	8,77E+00	8,06E-05	Fuste	1,48E+00	8,63E-05
	Punta	1,28E+01	1,61E-04	Fuste	2,86E+00	1,73E-04
	Punta	3,98E+01	3,22E-04	Fuste	5,84E+00	3,46E-04



		$\overline{u}_{y12}$		$\overline{u}_{y12}$		
		$\Delta F(\text{kN})$	(m)	$\Delta F(\text{kN})$	(m)	
<b>Arena Densa</b>	Punta	2,83E+00	6,70E-06	Fuste	3,32E-01	7,72E-06
	Punta	9,09E+00	3,34E-05	Fuste	1,68E+00	3,95E-05
	Punta	1,64E+01	6,68E-05	Fuste	3,28E+00	8,04E-05
	Punta	2,92E+01	1,33E-04	Fuste	6,72E+00	1,56E-04

